UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

ASPECTOS DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO EM ALGUMAS CIVILIZAÇÕES E POVOS E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Maria Terezinha Jesus Gaspar

Orientador: Prof. Dr. Sergio Nobre

Tese de Doutorado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração: Ensino e Aprendizagem da Matemática e Seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do Título de Doutor em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

2003

BANCA EXAMINADORA

____

____

____

____

____

____

____

aluna

Rio Claro, ______ de _____________________ de 2003

Resultado: ____

A **Dani**

Sua beleza interior me inspira, emociona e me faz ver o amanhã com otimismo.

AGRADEÇO A

Célia Gomes, professora que durante a minha graduação, me incentivou e me mostrou caminhos profissionais que jamais imaginei pudessem existir.

Meus amigos **Ana Maria**, **Célia**, **Ester**, **Graça**, **Guy**, **Haydée**, **Iara**, **Lúcia**, **Rosa**, **Sonia** e **Teresa** . Cada um a seu modo, me ajudou nesta caminhada.

Meu orientador **Sergio Nobre** pela acolhida, segurança e confiança que transcenderam as meras orientações formais.

Rosa Baroni e **Marcos Teixeira** pelas sugestões, discussões e amizade.

Suzeli Mauro por toda ajuda dada durante a realização deste trabalho.

Maria Luiza e Ana Maria pela revisão do texto.

Departamento de Matemática da UnB que contribuiu com este trabalho permitindo meu afastamento integral das atividades docentes.

SUMÁRIO

Índice

RESUMO

As principais questões deste trabalho surgem das minhas experiências como professora em cursos de Licenciatura em Matemática e do meu interesse em pesquisar as relações entre a história e o ensino-aprendizagem da matemática. Por que a incorporação da história da matemática em cursos de geometria na formação de professores? Como utilizar a história da matemática para discutir conhecimentos geométricos e abordagens pedagógicas para o ensino-aprendizagem da geometria? Trata-se de um trabalho teórico, de levantamento bibliográfico e organizacional do material encontrado em livros de história da matemática, e trabalhos de pesquisa sobre as tradições geométricas de algumas civilizações e povos, a saber: China, Índia, Egito, Babilônia, Indígenas Brasileiros e alguns Povos Africanos. O objetivo é fazer uma compilação e análise desse conhecimento e então propor uma forma de trabalhar o conhecimento geométrico na formação de professores do ensino fundamental e médio tomando como referencial a dimensão histórica.

Palavras Chave: Educação Matemática, Ensino, Formação de Professores, Geometria, História da Matemática

ABSTRACT

The main questions of this work arise from mine experiences as a teacher of undergraduate curses for mathematics teachers and of my interest in the relationship between the history and teaching-learning of mathematics. What is the purpose of incorporating the history of the mathematics in geometry curses for teachers educations? How to use the history of mathematics to discuss geometric knowledge and pedagogic approaches for the teaching-learning of geometry? This is a theorical work that cames from bibliographical survey and organization of the material found in texts of history of mathematics and researches about geometric traditions of some civilizations and people, such as: China, India, Egypt, Babylon, Brazilian Natives and some African people. The main proposal is to realize a compilation and analyses of such knowledge and then propose how to deal with the geometric knowledge in the education of elementary and high school teachers using the historical dimension

Key-words: Mathematics Education, Teaching, Geometry, History of Mathematics ,

Introdução

1. Considerações Gerais

Há mais de quatro mil anos, pessoas de todo o mundo estudam, aprendem e usam a matemática, embora seja relativamente recente que a matemática tenha se transformado em um assunto de ensino, em muitos países, para uma grande proporção da população. Com o estabelecimento da educação universal, mais atenção freqüentemente tem sido dada a questões de como, o que e porquê ensinar a matemática. Fauvel[1] afirma que estas são decisões políticas, embora sejam influenciadas por uma variedade de fatores que incluem a experiência dos professores, as expectativas de pais e patrões, e o contexto social dos debates sobre conteúdo e currículo.

É amplamente reconhecido que a matemática desempenha um papel importante na formação do aluno desde o início dos sistemas educacionais, que o modo como ela é ensinada afeta o desempenho dos estudantes e que muitos daqueles que vieram a fazer contribuições para o desenvolvimento da matemática foram influenciados por alguns dos seus professores.

Com relação à dimensão histórica[2] no ensino da matemática, vários pesquisadores consideram que a história da matemática como um recurso pedagógico a ser incorporado ao trabalho do professor é benéfico e que é importante saber como ela pode ser introduzida em algumas atividades de sala de aula, contribuindo para o ensino-aprendizagem da matemática e, como pode facilitar o alcance dos objetivos dentro do currículo de matemática.[3]

Embora a importância da dimensão histórica no ensino da matemática seja reconhecida é ainda difícil escolher caminhos didáticos através dos quais tal importância seja explicitada e que esteja de acordo com as necessidades e limites do contexto. Cautela é compreensível porque a introdução da história no ensino sem estes pré-requisitos, pode tornar o programa mais pesado.[4] Além disso, sua introdução exige uma revisão no conhecimento dos professores e na sua formação.

Consciente da necessidade de reflexões contínuas no que diz respeito à importância da educação matemática no ensino fundamental e médio, acreditando que aqueles que participam

---

[1] Fauvel, J.; van Maanen, J. p. xvii

[2] O termo dimensão histórica significa usar a história da matemática como recurso pedagógico para ensinar matemática e não dar aulas de história da matemática.

[3] Fauvel, J. p. 3; Fasanelli, F. p. 1

[4] Furinghetti, F.; Somaglia, A. p. 27

da formação de professores devem propiciar um ambiente no qual todos os assuntos relativos ao ensino-aprendizagem da matemática sejam discutidos e estando interessada em encontrar respostas às questões relativas à incorporação da história da geometria no ensino e na formação de professores, resolvi realizar estudos que possam responder a duas indagações que considero fundamentais:

- Por que a incorporação da dimensão histórica em cursos de geometria na formação de professores?
- Como utilizar a dimensão histórica para discutir conhecimentos geométricos e abordagens pedagógicas para o ensino-aprendizagem da geometria?

2. A Formação de professores

Sempre que me vejo diante das seguintes tarefas: dar aulas para professores-alunos[5]; organizar programas de uma disciplina de conteúdo matemático a ser ministrada para esse público; reunir-me com professores-alunos para discutir questões relativas ao ensino-aprendizagem da matemática e fazer pesquisas relativas ao ensino-aprendizagem da matemática, não posso deixar de reportar-me a questões que dizem respeito ao ensino-aprendizagem da matemática no ensino fundamental e médio.

Considerando que um dos principais objetivos dos cursos de formação de professores de matemática é viabilizar a formação de profissionais para o pleno exercício da profissão que escolheram – ser professor de matemática do ensino fundamental e médio – tais cursos devem oferecer a esses indivíduos em formação condições para discutirem todos os assuntos relativos ao seu trabalho profissional e, portanto, as questões que dizem respeito ao ensino-aprendizagem da matemática no ensino fundamental e médio.

Quando olhamos para os parâmetros curriculares nacionais do ensino fundamental e médio, vemos que os dois níveis de escolaridade, no que diz respeito a seus objetivos, incluem a compreensão de conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas, o desenvolvimento de capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, de espírito crítico e criativo, de abstração, de investigação, de análise e compreensão de fatos matemáticos e da própria realidade.

---

[5] A expressão "professor-aluno" é utilizada neste trabalho sempre que me refiro ao aluno de licenciatura em matemática ou ao professor do ensino fundamental e médio em formação continuada.
As palavras "professor" e "aluno" referem-se ao professor de terceiro grau que trabalha com formação de professores e ao aluno do ensino fundamental e médio, respectivamente.

Além disso, os PCN's orientam para uma educação matemática que conduza a percepção da matemática como construção humana; que desperte o interesse pela realidade de sua região, do seu país e do mundo em geral; que reconheça a contribuição da matemática para a compreensão e resolução de problemas do homem através dos tempos; que aprecie a beleza intrínseca da matemática e da presença dela na arte, nas ciências, na tecnologia e na vida; que desenvolva a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real; que aplique conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento e que modele através da matemática as situações da vida real.

Isto mostra que a formação do professor de matemática não deve se limitar apenas ao estudo dos conteúdos matemáticos, mas é fundamental que o professor-aluno tenha um espaço onde ele possa discutir meios que viabilizem um trabalho com seus alunos que considere essas orientações.

Com relação à história da matemática como recurso pedagógico, os parâmetros curriculares nacionais afirmam que ela pode oferecer uma importante contribuição para o processo de ensino-aprendizagem da matemática. Ao revelar a matemática como uma criação humana, mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas em diferentes períodos históricos, estabelecer comparações entre conceitos matemáticos e processos do passado e presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver mais favoravelmente atitudes e valores para o estudante face ao conhecimento matemático.

Uma educação matemática que contribua para a formação do cidadão de modo que ele saiba utilizar diferentes tecnologias de linguagem e que seja capaz de resolver e propor problemas deve explorar metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação e o espírito crítico favorecendo a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios.

3. A Pesquisa

Levando em conta todos os argumentos, questionamentos e considerações colocados, o meu interesse em trabalhar com geometria em cursos de formação de professores e minhas preocupações relativas ao ensino-aprendizagem da geometria no ensino fundamental e médio e na formação de professores resolvi assumir as tarefas de:

- Fazer um levantamento em livros de história da matemática e trabalhos de pesquisas sobre as tradições geométricas de algumas civilizações e povos, a saber: China, Índia, Egito, Babilônia, os Indígenas Brasileiros e alguns Povos Africanos;
- Fazer um levantamento bibliográfico de trabalhos que tratam da relação entre história da matemática e educação matemática considerando que esta relação permeia todo a pesquisa que estou desenvolvendo;

com os objetivos específicos de:

- Coletar informações sobre a geometria de cada uma dessas civilizações e povos;
- Conhecer as análises e reflexões dos historiadores da matemática e etnomatemáticos sobre tais geometrias;
- Refletir sobre como a história da matemática pode ser incorporada ao estudo da geometria;
- Propor formas de trabalhar os conhecimentos históricos e geométricos;
- Refletir quanto à importância da incorporação da dimensão histórica no ensino-aprendizagem da geometria;
- Oferecer um material que possa ser utilizado pelos professores e pelos professores-alunos em sua prática docente.

Acredito que dessa forma estarei respondendo às duas questões colocadas no início deste capítulo.

Considero que esta pesquisa mais se aproxima da linha de pesquisa relativa à relação entre história da matemática e educação matemática proposta no documento[6]:

- Pesquisas sobre o trabalho com os conteúdos específicos da matemática de um curso de graduação, tendo como referencial seu desenvolvimento histórico.

Pretendo contribuir apresentando algumas propostas de como incorporar a história da matemática no ensino-aprendizagem da geometria em um curso de formação de professores e, na discussão dos recursos pedagógicos que podem ser utilizados para o ensino-aprendizagem da geometria no ensino-fundamental e médio. Muitas das propostas e considerações que aparecem no trabalho podem ser aplicadas a outras áreas do conhecimento matemático.

---

[6] Baroni, R. L. S.; Nobre, S. p. 134

4. Os Procedimentos Metodológicos

A metodologia utilizada baseou-se em estudos de livros, artigos, teses e *sites* levando também em consideração as experiências vivenciadas por mim na minha prática docente no ensino de matemática e no trabalho com professores em formação e em formação continuada.

A procura de respostas às questões levantadas neste trabalho iniciou com um levantamento bibliográfico. O *Mathematical Reviews*, os Índices da *Historia Mathematica* e o acervo de algumas bibliotecas foram o ponto de partida.

Considerando que grande parte do conhecimento geométrico que é trabalhado no ensino fundamental e médio e nas disciplinas de geometria dos cursos de formação tem sua origem na Antigüidade, concentrei minhas buscas nesse período.

A leitura dos textos gerais de história da matemática consultados tornou evidente a relativa escassez de informação e detalhamento com relação ao conhecimento geométrico anterior à Grécia Antiga.

Surgiu então, de imediato, a inquietação por mais informações sobre o conhecimento geométrico das antigas civilizações egípcia, babilônica, hindu e chinesa e dos métodos utilizados por elas.

Levando em conta também que é importante que se conheça as diversas culturas, que se procure desenvolver nos nossos alunos e professores-alunos atitudes de respeito e valorização dos costumes de cada povo; que todos os povos devem ter espaço para se comunicar e se desenvolver e a influência das várias etnias na formação do povo e da cultura brasileira, não poderia deixar de considerar a possibilidade de incluir neste trabalho o conhecimento geométrico de alguns povos africanos e indígenas brasileiros. Acredito que é possível uma educação matemática que contribua para a formação de um indivíduo que respeite as diversas culturas e seja consciente da diversidade de costumes e valores encontrados nos diversos grupos sociais. Essa possibilidade tornou-se viável a partir do levantamento e análise do material que encontrei sobre estes povos.

Assim, após um contato inicial com alguns trabalhos que tratam do conhecimento matemático dos africanos e dos indígenas brasileiros e minhas primeiras reflexões relativas às questões que norteiam esta pesquisa, resolvi incluir na bibliografia a ser analisada os trabalhos de Etnomatemática e de Antropologia sobre esses povos. É importante ressaltar que a escolha das culturas africanas e dos povos indígenas citados neste trabalho se deu em função do material encontrado e do fato de ser impossível abordar todos os povos e culturas.

Desta forma assumi a tarefa de fazer um levantamento e análise do material encontrado sobre a geometria das civilizações e povos aqui estudados, apresentar sugestões de como trabalhar a geometria em um curso de formação de professores, discutir como os problemas geométricos foram tratados por cada um dos povos, que tipo de reflexões já foram feitas sobre eles e como essas informações podem auxiliar na formação do professor-aluno, tanto em relação ao conteúdo geométrico quanto à sua prática pedagógica.

Convém ressaltar que na análise do material duas posturas foram tomadas:

- Discussão dos métodos utilizados pelos grupos sociais aqui estudados explicitados na bibliografia consultada.
- Discussão dos possíveis métodos que podem ser utilizados – sempre que um método não está explicitado – a partir das informações que consegui sobre o assunto.

A segunda postura é mais freqüente com relação ao material encontrado nos livros de antropologia nos quais a preocupação dos autores não era com a geometria, por exemplo, na descrição das construções das casas de alguns povos indígenas. A riqueza de informações permite que alguém, com o “olhar” de matemático, possa encontrar uma grande variedade de idéias e conceitos a serem explorados. Foi isso que fiz, em alguns momentos.

Durante a realização deste trabalho tive sempre como eixo norteador a questão de como o professor que trabalha na formação de professores de matemática pode abordar os conhecimentos geométricos preparando o professor-aluno para trabalhar no ensino fundamental e médio. Assim, o trabalho é dirigido principalmente a esses professores que não devem se restringir, ao incorporarem a dimensão histórica ao seu trabalho pedagógico com os professores-alunos, nem às civilizações e grupos sociais nem às épocas aqui discutidas, mas avançar tanto no tempo como na diversidade dos grupos sociais.

A opção de não incluir a civilização grega neste trabalho deveu-se ao fato de que os textos gerais de história da matemática consultados trazem um rico material sobre o conhecimento geométrico dos gregos e que, desta forma os professores podem buscar as informações nesses textos. Considero essencial que os professores-alunos discutam a importância e contribuição dos gregos para o desenvolvimento histórico dos conhecimentos geométricos aqui discutidos.

5. Estrutura do Trabalho

Esse texto foi dividido em 7 capítulos e contém no final de cada capítulo um índice de figuras e a bibliografia consultada.

O **primeiro capítulo** tece considerações gerais sobre a relação entre a história e o ensino-aprendizagem da matemática ressaltando algumas das razões do porquê do uso da dimensão histórica no ensino-aprendizagem da matemática no ensino fundamental e médio e sobre a geometria como objeto de ensino antes de tratar das relações entre a história e o ensino da geometria em um curso de formação de professores. Procurei mostrar aqui alguns dos elementos que nortearam minhas reflexões e propostas discutidas nos demais capítulos.

Não é minha intenção neste capítulo tratar da questão da inclusão da disciplina história da matemática no currículo dos cursos de formação de professores e, sim, defender a importância da história da matemática como recurso pedagógico e propor alguns modos de como a dimensão histórica pode ser incorporada ao trabalho do professor em um curso de formação de professores de matemática. Apesar de restringir-me à geometria considero que muitas das reflexões e propostas encontradas neste texto se aplicam a quase todas as disciplinas que geralmente fazem parte de um currículo de licenciatura em matemática.

Partindo do fato de que o conhecimento matemático se dá em um contexto social, que o desenvolvimento da matemática e os modos de "fazer matemática" são influenciados e influenciam esse ambiente sócio-cultural, o **segundo capítulo** é dedicado a uma breve apresentação das civilizações e grupos sociais tratados neste trabalho, restrita à época em que as idéias e métodos geométricos apresentados nos demais capítulos se desenvolveram. Algumas informações sobre a quem se destinavam o conhecimento geométrico, como se dava a transmissão desse conhecimento e para que fins e propósitos, também são discutidas.

As informações contidas neste capítulo têm por objetivo oferecer informações e referências bibliográficas sobre estas civilizações e povos.

Nos capítulos 3 a 7 apresento aquilo que pude encontrar sobre o conhecimento geométrico desses povos que aparece nos cursos de formação de professores de matemática e que está relacionado a conteúdos geométricos estudados no ensino fundamental e médio. A forma de agrupar os temas e sua escolha se deu naturalmente à medida que a pesquisa foi se desenvolvendo. Selecionei, portanto, os temas que apareciam em destaque na bibliografia consultada. O triângulo, por exemplo, aparece em alguns desses textos inserido na discussão histórica de outros conteúdos geométricos como no estudo da pirâmide e do teorema de Pitágoras. Isto me levou a levantar a hipótese de que talvez seja uma opção pedagógica estudar o triângulo a partir de outros conteúdos geométricos e sempre que esse conhecimento se torne necessário.

Alguns temas não foram tratados por uma questão de tempo ou por não aparecerem na bibliografia consultada com a mesma relevância dos escolhidos.

Várias considerações sobre a dimensão histórica em um curso de formação de professores aparecem nesses capítulos.

O círculo e o quadrado são duas formas geométricas que aparecem em todas as civilizações associadas a rituais religiosos, a astronomia, arquitetura ou tecelagem. No **capítulo 3** discuto a variedade do conhecimento geométrico que pode ser estudado e desenvolvido a partir da análise de como essas formas foram incorporadas à cultura de cada um desses povos.

O **capítulo 4** é dedicado ao estudo do trapézio, de pirâmides e troncos de pirâmides e traz informações sobre métodos para calcular a área do trapézio e o volume de pirâmides e troncos de pirâmides. A importância que os antigos hindus davam ao trapézio isósceles é ressaltada nesse capítulo.

As informações encontradas sobre cilindros, cones, troncos de cones e esferas são discutidas no **capítulo 5**. Modos de trabalhar esse conhecimento em um curso de formação de professores e a riqueza de questões relativas ao ensino da matemática que podem ser levantadas a partir desse estudo aparecem no decorrer do capítulo.

Do mesmo modo que os povos desenvolveram sua própria matemática, também desenvolveram suas tradições artísticas e artefatos. O estudo das simetrias, do modo como é sugerido no **capítulo 6**, leva em conta os artefatos e tradições artísticas dos povos aqui estudados.

O teorema de Pitágoras, discutido no **capítulo 7**, é um dos mais famosos e úteis da geometria elementar. Em algumas das civilizações aqui estudadas aparece às vezes como um teorema sobre retângulos, outras como um teorema sobre triângulos retângulos. Métodos distintos para demonstrá-lo são encontrados nestas civilizações.

6. Bibliografia

BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. A Pesquisa em História da Matemática e suas Relações com a Educação Matemática In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas.** 1a. ed. São Paulo: UNESP, 1999. 7. p. 129-136.

FASANELLI, F. The Political Context In: FAUVEL J. & Van MAANEN, J. **History im Mathematics Education. ICMI STudy.** 1a. ed. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 1-38.

FAUVEL, J.; van MAANEN, J. The Role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics: Discussion Document for an ICMI Study. 1997-2000. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 34, p. 255-259, 1997.

FAUVEL, J.; van MAANEN, J. Introdução. In: FAUVEL, J. & VAN MAANEN, J. **History in Mathematics Education. The ICMI Study.** 1a. ed. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. XI - XVII.

FAUVEL, J. Using History in Mathematics Education. **For the Learing of Mathematics**, v. 11, p. 3-6, Junho 1991.

FURINGHETTI, F.; SOMAGLIA, A. Storia Della Matematica in Classe. **L'Educazione Matematica**, Itália, v. 2, p. 22-46, 1997.

MEC- SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** 1a. ed. Brasília, 1998. 58 p.

MEC-SECRETARIA DE ENSINO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática - 1a. à 4a. séries.** Brasília, 1997. 142 p.

MEC-SECRETARIA DE ENSINO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais- Introdução- 5a. à 8a. séries**. Brasília, 1998. 174 p.

VISOKOLSKIS, S. Intuiciones Geométricas y Percepción Visual em la Concepción Griega de la Matemática: Ser o No Ser In: HPM, 1994, Blumenau. **Proceedings.** Blumenau, 1994. p. 145-155.

1. A Dimensão Histórica na Formação de Professores

1.1. Introdução

Este capítulo tem como objetivo principal tecer considerações sobre a dimensão histórica em um curso de formação de professores e, especialmente, apresentar algumas justificativas do porquê da abordagem histórica e de como inseri-la nas disciplinas responsáveis pelo estudo da geometria nesses cursos.

Apesar deste trabalho dedicar todo um capítulo a este tema, várias discussões sobre o assunto estarão inseridas nos capítulos que abordam alguns conteúdos geométricos discutidos nos cursos de formação de professores. Acredito que a apresentação histórica e a discussão desses conteúdos propiciam algumas reflexões sobre o assunto e fornecem respostas de modo mais claro às questões aqui levantadas.

1.2. Considerações sobre o Ensino da Geometria

Antes de analisar a questão da dimensão histórica em um curso de formação de professores é necessário que se reflita sobre a geometria como um objeto de ensino antes de olhar para as relações entre história da matemática e o ensino-aprendizagem da geometria.

Por que estudar geometria em um curso de formação de professores? Talvez a resposta mais simples seja porque os futuros professores irão ensinar geometria no ensino fundamental e médio. Mas, por que ensinamos geometria no ensino fundamental e médio? Esta é uma interrogação fundamental a ser respondida pelos alunos, alunos-professores e professores, que dedicam grande parte do seu tempo ao processo de ensino-aprendizagem da geometria, e é certamente uma questão que precisa ser discutida nos cursos de formação.

Os estudiosos apontam uma série de razões para o estudo da geometria nos diversos níveis de escolaridade. Destacarei aqui algumas delas sem nenhuma pretensão de apresentar uma lista completa.

- Ela faz parte de um patrimônio cultural que é determinante na organização de nossa sociedade;

As primeiras construções feitas pelo homem na tentativa de abrigar-se e proteger-se do ataque dos animais, e os primeiros instrumentos de caça e pesca inventados por ele podem ter contribuído para a formação de algumas noções geométricas.

Mais tarde, quando o homem fixa-se na terra e passa a ser um homem produtor e não apenas coletor, ele começa: a delimitar porções de terra para cultivar, construir habitações com madeira, pedra, etc, criar instrumentos para cultivar a terra e utensílios domésticos. O homem dá forma aos objetos visando sua utilidade e praticidade e para isso utiliza-se do formato de alguns objetos encontrados na natureza, aperfeiçoando-os. Assim, observando e refinando tais formas para delas fazer o melhor uso, o homem consegue melhorar seu trabalho manual e elaborar a noção abstrata de forma. A partir desse movimento de observação, ação e criação de formas e relações espaciais o homem desenvolve modos de interpretar a natureza. Com o passar dos séculos o homem produtor evoluiu e vamos encontrá-lo lidando com noções geométricas.

Assim, da complexidade crescente das relações do homem com a natureza, levando à descoberta e ao aprimoramento constante de noções geométricas para lidar com tais relações; da escola como uma instituição que propicia a aquisição de conhecimentos, como um local que ajuda o aluno a desenvolver seu potencial, modos de pensar e descobrir caminhos para transformar a sociedade em que vive, podemos afirmar que a geometria é um componente importante no currículo escolar.

- A geometria faz parte da vida cotidiana do aluno desde o seu nascimento e possui muitas aplicações no mundo real;

Da visão geométrica de mundo construída historicamente, os conceitos espaciais são necessários para entender, interpretar, apreciar e atuar sobre este mundo. Desta forma, a geometria é importante para o conhecimento do mundo real, para o processamento e interpretação visual.

- É um tópico para encorajar a resolução de problemas e desenvolver algumas habilidades e competências;

À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação, as capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores e de trabalhar cooperativamente são cada vez mais exigidas. Encontramos na geometria uma variedade de problemas e de maneiras de resolvê-los que poderiam servir como um dos instrumentos a serem utilizados na formação de um indivíduo para que venha responder a tais exigências da sociedade.

- Esse conhecimento é importante para o desenvolvimento cognitivo do aluno e do raciocínio lógico-dedutivo;

Para que geometria contribua para o desenvolvimento cognitivo do aluno, é indispensável que o professor estimule os alunos a fazer explorações, construções, representações, que possam levá-los a indagar, identificar, redigir e perceber propriedades geométricas.

- É uma forma de representação de outros conceitos e idéias matemáticas e é um saber que estabelece conexões entre os diversos tipos de pensamento matemático.

De acordo com Bastos[1]

> São inúmeros os exemplos, ao longo da história do pensamento matemático, de idéias matemáticas que surgiram de tentativas de resolução de problemas geométricos e de problemas não geométricos que se resolvem por métodos geométricos.

- O trabalho realizado com a geometria pode: favorecer a análise de fatos e de relações; estabelecer ligações entre eles, e, a partir daí, deduzir novos fatos e novas relações. Isto pode proporcionar o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo[2].

Sendo o trabalho com a geometria importante é preciso que seu ensino seja valorizado e enfocado de maneira adequada no âmbito escolar, fato esse que não ocorre na maioria das vezes, pois seu ensino é sempre relegado a um segundo plano em relação à aritmética e à álgebra.

Do exposto acima, podemos distinguir dois aspectos principais do ensino-aprendizagem da geometria: a visão da geometria como a ciência do espaço e como uma estrutura lógica, onde ela é o ambiente no qual o aprendiz pode desenvolver suas impressões sobre a estrutura matemática.

Existem, ainda, vários aspectos que justificam o trabalho com a geometria em um curso de formação de professores que são corroborados por vários pesquisadores:

- O professor-aluno irá ensinar ou ensina geometria aos alunos do ensino fundamental e médio e, portanto, é preciso que tenha domínio e entendimento de seus conceitos básicos, de suas técnicas fundamentais e dos diversos modos de trabalhar com a ela no ensino fundamental e médio;

- É importante que o professor-aluno tenha consciência do papel fundamental da geometria na formação de seus alunos e sua relevância para o desenvolvimento de outras ciências do mundo técnico e social.

---

[1] Bastos, R. p. 2
[2] Pavanello, R. M. p. 16

Considero que, neste sentido, o ensino da geometria deve contribuir para preparar o indivíduo de modo que adquira a competência matemática adequada a si próprio tornando-o apto a usar modelos matemáticos com vistas à solução de problemas. Além disso, o ensino da geometria deve fomentar o reconhecimento da utilidade da matemática em nossa sociedade.

É necessário que o professor-aluno reflita sobre os métodos utilizados para resolver problemas geométricos, sua importância para as demais áreas da matemática e de outras ciências, e na geração dos passos iniciais da atividade científica e no desenvolvimento do pensamento matemático dele próprio e de seus (futuros) alunos do ensino fundamental e médio.

- O futuro professor de matemática deve ter em sua formação um espaço onde ele possa discutir os conteúdos geométricos trabalhados no ensino fundamental e médio e questões pedagógicas relativas ao ensino-aprendizagem de tais conteúdos.

Na prática de ensinar matemática, geralmente o professor adota um modelo de ensino que contém elementos de sua própria experiência como estudante. Com esse modelo, acompanham idéias a respeito: do papel do professor (geralmente um expositor) e do aluno em sala de aula; do modo como o livro texto pode ser utilizado; dos tipos de problemas existentes em uma sala de aula, de atividades a serem desenvolvidas com os alunos e de avaliações a serem aplicadas. Na realidade, cada professor possui um modelo ou uma caracterização do que é a matemática e como esta pode ser aprendida pelos alunos. Sua experiência como estudante se torna determinante nas idéias que ele tem sobre esta disciplina e este modelo influi nas decisões diárias que necessita tomar a respeito de como apresentar o conteúdo e da sua relação com o aluno em sala de aula.[3]

A existência de um espaço onde sejam discutidas as concepções que os alunos-professores têm dos conteúdos geométricos, objetos de estudo no ensino fundamental e médio, que permita refletir sobre a forma como aprenderam tais conteúdos e conhecer outros referenciais e modos de apresenta-los e discuti-los, ajudaria a formar uma concepção mais reflexiva e crítica sobre o ensino da geometria. Aqui o componente histórico ajudaria a conhecer a natureza das idéias geométricas e do seu desenvolvimento, fator este que considero fundamental na tomada de decisão quanto ao conteúdo e à sua forma de apresentação pelo futuro professor em sala de aula.

---

[3] Trigo, L. M. S. p. 421

- É importante que o professor-aluno entenda o porquê da geometria a ser ensinada aos alunos do ensino fundamental e médio; reflita sobre o modelo atual de ensino da geometria e sobre a possibilidade de buscar algo que tenha como reflexo em sua estrutura o fato de que essa geometria foi construída e adaptada a distintas aspirações, dentro de estruturas sociais diferentes. É importante, também que ele adquira flexibilidade suficiente para adaptar-se às diferentes propostas que venham surgir deste entendimento e das reflexões.

A geometria como objeto de ensino surge quando certos grupos de pessoas necessitam de técnicas matemáticas e a transmissão destas técnicas é concentrada em uma instituição social, em um estabelecimento de ensino que tem como principal objetivo desenvolver técnicas de solução de problemas que surgem do trabalho e da organização em sociedade. No entanto, a geometria como objeto de ensino pode perder sua dependência direta dos problemas práticos e tornar-se um assunto de interesse próprio (como comprovado, por exemplo, por alguns problemas não práticos nos papiros egípcios). Ela também pode ser usada na educação não diretamente ligada à resolução de problemas, como por exemplo, no desenvolvimento de um pensamento crítico-reflexivo e autônomo do indivíduo.

O desenvolvimento e diferenciação de instituições parcial e completamente dedicadas ao ensino-aprendizagem da matemática e da geometria em especial é um importante processo histórico[4]. Nas diversas instituições educacionais do passado, objetivos e argumentos para o ensino da geometria têm sido muitos e variados e são determinantes no modo como os professores encaram esta disciplina, criando uma tradição de ensino da geometria que se reflete nas atitudes dos professores diante de seus alunos e da própria geometria. É importante que o professor aluno tenha elementos para contestar esta tradição e refletir sobre suas próprias concepções e atitudes diante do assunto.

1.3. A História da Matemática como Referencial Pedagógico para o Ensino da Geometria

A geometria a se ensinar deve ser principalmente, e ao longo de toda escolaridade, aquela que nos permite interpretar e intervir no espaço em que vivemos. Esta inclui a visualização de objetos, a sua representação, a manipulação dessas representações e a criação de novos objetos; inclui, também, a resolução de problemas de aplicação da geometria às situações da vida real, sua ligação à arte, etc.

---

[4] Bos, H. J. M. & Mehrtens, H. p. 13

Por outro lado, quando buscamos os modos como a geometria vem sendo ensinada percebemos que esta durante muito tempo, foi ensinada na escola a partir de uma concepção formalista; seus símbolos e regras eram apresentados aos alunos de um modo que destituía de suas referências histórico-culturais. Uma aura de neutralidade perpassava os conteúdos matemáticos, transmitindo a idéia de um conhecimento imutável, transcendente ao tempo e ao espaço.

Essa concepção ainda é encontrada no âmbito da sala de aula tanto do ensino fundamental e médio como nos cursos de bacharelado e licenciatura em matemática do país e também aparece em boa parte dos livros didáticos. Assim, torna-se cada vez mais longe do aluno e do professor-aluno a arte da criação matemática e cada vez mais próxima a visão de uma matemática pronta em que o processo de ensino-aprendizagem por ensaio e erro, por experimentação fica cada vez mais invisível. Dessa forma, as aulas de matemática deixam de ser espaços propícios a descobertas e passam a ser ambientes de repetições. Não existindo a preocupação em construir uma sistematização da geometria com base em noções primitivas, empiricamente elaboradas e testadas, ocorre uma algebrização da geometria, distanciando-a de seu caráter prático e aproximando-a do formal. Essa orientação, aliada ao despreparo dos professores, contribui para que a geometria não seja ensinada.

Segundo Sebastiani[5], no ensino, a matemática ainda continua revestida de verdades absolutas, universais e atemporais. Para ele, é necessário que chegue à escola a concepção de uma matemática construída pelo homem, imperfeita e sem verdades universais e que devemos mostrar para os professores-alunos que a crença na verdade universal dos conceitos matemáticos é fruto de uma visão da ciência, uma visão evolucionista e eurocentrista desta ciência. Não existe uma matemática, mas cada sociedade constrói a sua matemática. Como estamos mergulhados em uma sociedade que traz em sua bagagem toda ciência ocidental, com o dogma da verdade absoluta, somos levados a olhar a ciência do outro no máximo como uma fase da evolução para atingir o nosso saber.

No entanto, para chegar à forma a que temos acesso hoje, a matemática levantou hipóteses, alimentou dúvidas, viveu incertezas, imprecisões, enfim, cometeu "erros" e acertos no movimento de sua constituição como ciência. Não podemos negar aos alunos a oportunidade de percorrer tais caminhos na busca de conhecimentos, devemos valorizar todo o "ensaio" na busca de verdades.

[5] Sebastiani, E. p. 23

A Educação Matemática vem buscando e propondo, nos dias atuais novas estratégias para o ensino-aprendizagem da geometria, com o objetivo de democratizar o acesso ao saber. Diante desta problemática, encontramos discussões e pesquisas acerca do uso da história da matemática como um recurso mediador na prática pedagógica.

As pesquisas realizadas por educadores matemáticos, psicólogos e educadores em geral têm impulsionado uma revisão e uma reflexão acerca dos conteúdos a serem ensinados, assim como discussões sobre as abordagens didático-metodológicas a serem aplicadas pelo professor em sala de aula. Entre essas abordagens está a história da matemática como referencial pedagógico para o ensino-aprendizagem da matemática.

Quando olho para o trabalho do matemático e do estudante de matemática – principalmente em nível de pós-gradação percebo que, em algum momento do trajeto que se inicia com a escolha de um problema, objeto de sua pesquisa atual, ele utiliza informações históricas por uma série de motivos: descobrir o significado de um determinado termo matemático; conhecer os trabalhos que estão relacionados com o problema; obter informações sobre os matemáticos que trabalharam ou trabalham no problema ou em problemas correlatos; conhecer as idéias e métodos utilizados com o objetivo de, com a ajuda desses conhecimentos, encontrar caminhos que levem à solução do problema.

Embora muitos possam fazer isso simplesmente para saberem quem demonstrou o que e em que ano, busquem uma determinada demonstração que sugira alguma coisa que talvez possa ser aplicada ao seu objeto de pesquisa, etc., trabalho este elaborado simplesmente a partir de uma coletânea de fontes primárias, de um levantamento dos trabalhos que interessam e, ainda que tais textos sejam trabalhados sem nenhuma percepção clara de história i.e., sem tentar encadear as informações em um desenvolvimento histórico, o fato é que eles estão utilizando informações históricas, o que vem mostrar uma relação entre o fazer do matemático e a história da matemática.

Por outro lado, quando me volto para a formação do professor de matemática não fica claro que os professores tenham consciência da contribuição que a história da matemática pode dar à formação, nem que seja uma preocupação geral a inserção de, pelo menos, informações históricas na apresentação dos conteúdos matemáticos nas aulas de matemática.

Encontramos trabalhos sobre a história da matemática desde o primeiro período áureo dos gregos. De fato, já no século IV a.C. Eudemo elaborou três grandes investigações históricas: sobre o desenvolvimento da aritmética, **da geometria** e da astronomia.

Nobre[6], baseando-se nos historiadores contemporâneos, afirma que "Pitágoras haveria tido interesse pela história das ciências e também teria produzido algum material sobre o assunto".

Ainda em Nobre[7] tomei conhecimento de que, possivelmente, o único texto sobre história da matemática escrito antes da era cristã que chegou até nós foi escrito por Vitruvius; que textos dos séculos IV e VI d.C. como a obra de Simplicius contêm informações históricas; que textos biográficos aparecem nos séculos XIV a XVI, e o primeiros livros específicos sobre história da matemática foram escritos no século XVII, sendo o mais famoso o *Histoire des mathématiques* de Jean Étienne Montucla.

Arboleda[8] ressalta que quando se examinam as atividades dos grandes centros matemáticos do final do século XIX e do começo do século XX, pode-se constatar o reconhecimento que se outorga à história da matemática a ponto de, com freqüência, funções que hoje se diferenciam como especificamente históricas, naquelas épocas faziam parte do trabalho matemático. Naquela época os matemáticos tinham um grande interesse pela história e pré-história das teorias dos objetos de suas próprias investigações e a pesquisa científica em história da matemática estabeleceu-se institucionalmente.

Assim sendo, por pelo menos vinte e seis séculos estudiosos da matemática ou filósofos têm assumido a tarefa da reconstituição das idéias matemáticas, com maior ou menor rigor, ligada mais ou menos à história das ciências ou das civilizações e a outros ramos do conhecimento.[9]

A importância do conhecimento da história da matemática não se restringe apenas aos matemáticos e estudantes de pós-graduação que optaram pela carreira de matemático. A tese de que a história da matemática tem um papel valioso no ensino-aprendizagem da matemática é defendida por muitos matemáticos e educadores que há muito tempo concordam com o fato de que a educação matemática pode ser melhorada, de algum modo, com a incorporação da história da matemática. Muitos matemáticos e professores, de diferentes modos e por diferentes razões, têm algumas idéias sobre as relações entre a matemática e sua história.

Em decorrência disso encontramos uma grande variedade de trabalhos que discutem o papel da história no ensino da matemática. Durante a realização dessa investigação encontrei várias pesquisas ressaltando as potencialidades didáticas da história da matemática e uma

---

[6] Nobre, S. p.6
[7] Nobre, S. p. 31
[8] Arboleda, L. C. p 3
[9] Arboleda, L. C. p 3

convergência de opiniões relativas à forma como a dimensão histórica pode ser incorporada ao ensino da matemática.

De acordo com Miguel[10],

> Quando nos propomos a tarefa de consultar a literatura especializada sobre a participação da história no ensino aprendizagem da matemática é bastante freqüente encontrarmos argumentos reforçadores dessa participação entre matemáticos, historiadores da matemática e educadores matemáticos.

Um dos objetivos desta pesquisa foi conhecer as reflexões e pontos de vista que sustentam a discussão acerca do assunto e, a partir disso, fazer uma análise sobre a relação entre a história e o ensino da geometria ampliando assim a compreensão dos diversos aspectos envolvidos quando se trata de História, Geometria, Educação e Formação de Professores.

Fauvel[11], em seu artigo *Using History in Mathematics Education,* apresenta diversas razões que justificam o "uso" da história da matemática no ensino. Destaco neste trabalho algumas delas por considerar que são as que norteiam minhas reflexões sobre o assunto e sobre a incorporação de uma abordagem histórica no ensino da geometria. Saliento que a forma de apresentação não significa que existe uma ordem de relevância entre as justificativas.

- A dimensão histórica ajuda na organização do currículo.

Desde as épocas mais antigas, os registros escritos de instruções matemáticas incluem quase sempre problemas para o leitor resolver. A instrução matemática era certamente considerada uma atividade auto-instrutiva. Especulações sobre a teoria matemática só vão aparecer bem mais tarde com o surgimento da ciência grega. Antes disso, os registros das mais antigas civilizações babilônica, egípcia, hindu e chinesa revelam que a matemática estava geralmente incorporada a uma lista de problemas cujo esquema de solução era dado.

Portanto, as mais antigas instruções matemáticas diziam respeito à resolução de problemas. Obviamente tais problemas, como fonte primária de instrução, eram cuidadosamente escolhidos pelos autores tanto por serem úteis quanto por demonstrarem o estado da arte matemática. A utilidade destes problemas era baseada nas necessidades imediatas das sociedades em questão e assim, refletiam aspectos da vida diária levando o aluno a conhecer um pouco do lado humano de seu objeto de estudo.

---

[10] Miguel, A. p. 43
[11] Fauvel, J. p. 4

Tais coleções de problemas não são limitadas às sociedades antigas, mas aparecem regularmente ao longo da história da matemática até a época atual.[12]

Isto sugere a apresentação de alguns tópicos do currículo de matemática e sua organização considerando os problemas que aparecem na história da matemática e a discussão de suas soluções. Uma grande parte dos conteúdos geométricos estudados no ensino fundamental e médio podem ser organizados levando em conta tais problemas e os contextos sócio-culturais nos quais eles aparecem.

Vejo aqui, a história da matemática propiciando uma forte conexão entre ela e as demais tendências em Educação Matemática. De fato, a utilização de problemas encontrados em textos históricos nas aulas de matemática permite que professores e alunos apliquem as técnicas que conhecem para resolvê-los, comparem suas estratégias para solucioná-los com aquelas encontradas na história levando-os, por exemplo, a perceberem as vantagens e desvantagens da notação atual, que é possível a utilização dos métodos mais antigos associados aos novos recursos tecnológicos e que isto é bastante enriquecedor.

Para Grugnetti[13],

> ... a atividade de reconhecer e comparar estratégias é um dos aspectos mais importantes para desenvolver a aprendizagem matemática. Somente quando os estudantes se tornam capazes de comparar diferentes estratégias (para resolver problemas, mas também para provar teoremas) o processo de generalização pode evoluir.

Considero que a utilização da história da matemática como acabei de explicitar, além de auxiliar na apresentação e organização dos tópicos do currículo, mostra a diversidade cultural do desenvolvimento matemático permitindo que o mundo e sua história entrem em sala de aula.

Além disso, o professor-aluno conhecendo através da história da matemática as diversas formas como determinados conceitos foram tratados desde a sua origem em um problema prático até sua extensão teórica respondendo a problemas intrínsecos à própria matemática, terá melhores condições de escolher estratégias pedagógicas para trabalhar tais conceitos com seus alunos, de entender os diversos modos como seus alunos interagem com esses conceitos e de organizar melhor os conteúdos trabalhados em sala de aula tendo maior consciência do porquê abordar este ou aquele conteúdo. Isto pode propiciar a percepção do saber matemático como um conjunto de conceitos que permite resolver problemas tomando como ponto de

---

[12] Swetz, F. J. p. 201
[13] Grugnetti, L. p. 78

partida aqueles apresentados pela história da matemática, do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos e dos métodos de resolução de problemas.

- A dimensão histórica mostra aos alunos como os conceitos foram desenvolvidos ajudando assim seu entendimento.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio afirmam que é importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros já existentes. Além disso, afirmo que é necessário que também o aluno perceba e se aproprie das demonstrações e dos encadeamentos conceituais lógicos para validar intuições, dar sentido às técnicas associadas a esses conhecimentos, ajudando a enriquecer o universo de experiências e conhecimentos que servirão de base para novas intuições quando ele se defrontar com novos problemas. A dimensão histórica pode facilitar esta percepção e a de que a matemática não é uma seqüência discreta de capítulos, mas um mover entre diferentes modos de pensar sobre os conceitos matemáticos.

Grugnetti[14] observa que

> ... o desenvolvimento histórico dos conceitos pode ser considerado como uma seqüência de (pelo menos) dois estágios: um estágio intuitivo e um estágio maduro; vários séculos podem passar entre estes estágios. No primeiro estágio o foco é simplesmente operacional, o ponto de vista estrutural não é o principal. Do ponto de vista educacional, uma situação semelhante pode ser indicada: em um primeiro estágio os alunos abordam os conceitos por intuição, sem uma compreensão completa do assunto. Então a aprendizagem torna-se melhor e melhor até que ela amadurece.

Em geral, os conteúdos matemáticos são apresentados aos alunos de modo estanque, como se os diferentes conceitos sempre tivessem sido vistos do modo como hoje se considera. Sabemos que isso está muito longe da realidade. De fato, cada conceito seguiu um caminho, às vezes tortuoso e árduo, quase sempre muito rico em experiências e idéias para chegar ao ponto em que hoje se encontra e que também não é o seu ponto final. Se o professor-aluno conhece os caminhos seguidos por um determinado conceito, o modo como foi se desenvolvendo ao longo da história, os principais pontos de inflexão, as dúvidas e questões que gerou e muitas vezes ainda gera, certamente, enriquecerá o trabalho em sala de aula, e proporcionará um melhor entendimento ao aluno do seu próprio processo de aquisição de um novo conceito.

---

[14] Grugnetti, L. p. 85

Além disso, o estudo histórico de um determinado conceito matemático propicia ao estudante um contexto em que colocar esse conceito ajudando-o a apreciar sua importância para aqueles grupos sociais nos quais o conceito emergiu, sua importância interna à própria matemática e a entender mais claramente quando esse conceito é necessário ou não no discurso matemático.

Segundo Scriba[15] a história da matemática deve, entre outras coisas, ajudar a esclarecer e a tornar o indivíduo familiarizado com as relações que existem entre a estrutura da sociedade de uma determinada época e as idéias sobre cultura e educação que foram desenvolvidas. “Ela deve nos ensinar a entender, o que, e porque, toda educação matemática é também determinada pelas condições da época, deve nos tornar mais desejosos para tentar novos caminhos, apropriados ao presente”.

- Ajuda a desenvolver uma abordagem multicultural e como conseqüentemente possibilita o resgate da identidade cultural.

A dimensão histórica no estudo da matemática possibilita a percepção de que os desenvolvimentos matemáticos tomam lugar dentro de um contexto cultural e a compreensão de que toda cultura humana pode dar origem a desenvolvimentos matemáticos que são agora patrimônio de todos.[16]

Mostrar como o pensamento matemático e aplicações foram desenvolvidos em diferentes culturas, em resposta às necessidades e pensamentos de diferentes sociedades, não apenas nos torna capazes de entender melhor os conceitos matemáticos, mas também nos encoraja a uma maior criatividade e confiança no uso de seus vários ramos.

Estudar e entender os métodos que outros grupos desenvolveram em resposta às suas necessidades pode ajudar os estudantes a identificar as características particulares dos métodos que estão sendo ensinados a eles e melhorar o entendimento de um determinado conceito.

O estudo histórico permite identificar os fatores culturais que interferiram no estabelecimento de uma idéia e no esquecimento, às vezes por séculos, de outra. Também permite um estudo das aplicações práticas nas quais as idéias foram utilizadas, o entendimento dos modos como essas idéias que foram benéficas para um grupo foram

[15] Scriba *apud* Bos & Mehrtens. p. 9
[16] Fauvel, J. & Maanen, J. p. 256

utilizadas em benefício de outros, e uma apreciação dos modos como vários assuntos provocaram mudanças em diferentes culturas.

Essa abordagem multicultural, viabilizada pelo conhecimento histórico de um determinado assunto, permite que o professor conduza seus alunos a uma melhor apreciação da riqueza das idéias que fazem parte da matemática e a um maior entendimento da contribuição dessas idéias para as mudanças provocadas em sua própria cultura, proporcionando uma maior consciência da contribuição feita pelas diferentes culturas.

Esta ampliação de perspectivas pode dar um novo ímpeto aos professores e estudantes que, analisando as pesquisas dentro de sua própria cultura e de outras culturas, podem vir a entender que o que é encontrado é parte de uma herança global ao invés de simplesmente regional ou nacional.[17]

Grugnetti & Rogers[18] consideram que uma apreciação da contribuição que o multiculturalismo tem feito para nosso pensamento e atitudes oferece aos professores uma boa experiência para perceberem como eles podem estender as idéias formadas sobre a matemática além dos parâmetros previamente colocados pela cultura e sociedade européias, e valorizar outros modos de ver as coisas.

A aceitação do multiculturalismo, segundo estes autores[19], significa que

> ... a história pode agora ser usada para transmitir a mensagem que corresponde à atitude geral de muitos filósofos, escritores e matemáticos por séculos: que o entusiasmo e a criatividade são despertados pelo desejo de conhecer, pensar, explorar e por último provar, suficientes para mover para o próximo desafio matemático, ao invés de um desejo de achar um modo de elevar seu próprio país ou cultura, ou seu próprio gênero ou raça.

É importante que os alunos conheçam e entendam os caminhos nos quais idéias científicas mudam através do tempo e como a natureza destas idéias e os usos para os quais elas são colocadas são afetados pelos contextos sociais, morais, espirituais e culturais nos quais são desenvolvidas.[20] Isso permite perceber e explicar o papel social da matemática.

- Conhecer os obstáculos encontrados no passado para desenvolver alguns conceitos, teorias ou idéias ajuda a entender algumas das dificuldades dos alunos.

Algumas dificuldades dos alunos podem ser comparadas a obstáculos detectados na história do desenvolvimento de certos conceitos matemáticos, nas resistências encontradas na

---

[17] Grugnetti, L.; Rogers L. p. 46
[18] Grugnetti, L.; Rogers L. p. 46
[19] Grugnetti, L.; Rogers L. p. 50
[20] Fauvel, J. p. 4

aplicação de alguns métodos e técnicas e nos processos que levaram a superação desses obstáculos. Isto poderia ajudar o entendimento das dificuldades dos nossos alunos na aquisição e compreensão destes conceitos, na aceitação de algumas teorias, na compreensão de algumas idéias e na aplicação de alguns métodos.

Assim, o resultado da análise histórica de um determinado assunto pode ser usado para obter informações sobre o entendimento matemático dos alunos e para provocar uma reflexão do professor-aluno sobre as dificuldades que ele, quando estudou o assunto, também teve. Além disso, permite uma reflexão sobre os processos que o levou a superar essas dificuldades e o tempo necessário para isso.

Para Barbin[21], conhecer o desenvolvimento histórico da matemática afeta nossa opinião acerca do tempo que nossos alunos gastam no desenvolvimento e entendimento matemático.

- A história da matemática pode ser um recurso útil para o entendimento do processo de formação do pensamento matemático e para uma reflexão dos modos de como tais entendimentos podem ser usados na preparação das atividades em sala de aula[22].

É neste sentido que, de acordo com Radford[23], nas últimas décadas alguns educadores matemáticos têm recorrido à história da matemática.

Barbin[24] afirma que

> O desafio de uma perspectiva histórica é muito mais de fazer os alunos melhor compreenderem a atividade matemática que de os interessar por ela. Hoje, a vontade de interessar parece um pouco abandonada, em benefício de uma simples necessidade de motivar. A motivação é passageira, o interesse é durável. Um ensino que leva em conta o tempo deve considerar o tempo da história.

Grabiner[25] considera o conhecimento da história da matemática como "essencial no ensino e na compreensão da matemática". Esse conhecimento ajuda o professor-aluno a ver como a matemática se ajusta ao resto do pensamento humano e o entendimento da matemática em seu contexto histórico ajuda a compreender a matemática atual em seu contexto filosófico-científico e social e a ter uma melhor percepção do lugar da matemática no mundo.

A história da matemática pode auxiliar o professor-aluno a buscar, criar e desenvolver idéias de como trabalhar situações em sala de aula que propiciem à matemática contribuir

---

[21] Barbin, E. p. 65
[22] Radford, L. p. 143
[23] Radford, L. p. 143
[24] Barbin, E. 2000. p. 6-7
[25] Grabiner, J. V. p. 3

para o desenvolvimento de processos de pensamento e aquisição de atitudes colaborando, assim, para formar no aluno a capacidade de resolver problemas, gerar hábitos de investigação, proporcionar confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas e desenvolver a criatividade.

- A história da matemática ajuda a retomar as intuições no ensino-aprendizagem da geometria.

Muitas vezes a matemática é apresentada em sala de aula de um modo formal, semelhante ao modo como é exposto em um artigo, onde os processos intuitivos que levaram à criação matemática não são explicitados. A ênfase é dada ao rigor apesar do matemático em sua atividade criadora usar todo tempo a intuição.

Segundo Poincaré[26], é impossível estudar os trabalhos de matemáticos sem perceber e sem distinguir duas tendências opostas, dois tipos de pensamento igualmente necessários ao progresso da ciência e inteiramente diferentes: um tipo preocupado, antes de tudo, com a lógica e outro que se deixa guiar pela intuição. Tais tipos de pensamento são percebidos nos trabalhos matemáticos desde aqueles feitos na Antigüidade.

Para o autor o método escolhido por esses matemáticos não depende do seu objeto de pesquisa, mas "da sua própria natureza", de serem lógicos ou intuitivos da qual podem se desvencilhar quando abordam um assunto novo.

Entre os estudantes é possível notar as mesmas diferenças: alguns preferem tratar seus problemas pela "análise", outros pela "geometria".

Apesar desta possível escolha pelos matemáticos ou estudantes no tratamento de um problema a lógica e a intuição têm cada uma seu papel necessário ao fazer do matemático, são ambas indispensáveis. De acordo com Poincaré[27], "a lógica, a única que pode dar certeza, é o instrumento da demonstração: a intuição é o instrumento da invenção".

Sebastiani[28] afirma que para alcançarmos o conhecimento rigoroso, existe um processo que começa pela intuição, depois com o levantamento de hipóteses, a descoberta, e finalmente a validação.[29] Para o autor, a intuição é tão relevante quanto a lógica, e portanto, é tarefa do educador compreender como elas desempenham papéis diferentes na construção do conhecimento.

---

[26] Poincaré, H. p. 13
[27] Poincaré, H. p. 22
[28] Sebastiani, E. p. 81
[29] Sebastiani, E. p. 81

Barone[30] vem ao encontro das colocações de Poincaré ao afirmar que, o processo criativo envolve muito mais do que o pensamento lógico e a capacidade analítica: envolve também a intuição. O pensamento lógico e a capacidade analítica são atributos necessários a um cientista, mas estão longe de serem suficientes para o trabalho criativo. Aqueles palpites na ciência que conduziram a grandes avanços tecnológicos não foram logicamente derivados de conhecimento pré-existente: os processos criativos em que se baseia o progresso da ciência atuam no nível do subconsciente.

A intuição pode ser definida como um conhecimento claro, direto, imediato da verdade sem o auxílio do raciocínio[31]. Ela é o produto da imagem conceitual do indivíduo.

Para Poincaré[32], existem muitas espécies de intuição. Para ele, a intuição que pode provir de uma indução matemática rigorosa difere da intuição sensível, que depende unicamente da imaginação propriamente dita.

Fischbein[33] divide as intuições em dois grandes grupos: o das **intuições primárias** referindo-se àquelas crenças cognitivas que se desenvolvem no ser humano, de um modo natural, antes e independentemente de uma instrução sistemática, e o das **intuições secundárias** contendo aquelas que são desenvolvidas como resultado de treinamento intelectual sistemático. A mente humana submersa no pensamento lógico pode eventualmente desenvolver intuições.

No processo de desenvolvimento do pensamento matemático avançado os estudantes passam de intuições primárias, baseadas em sua matemática pré-formal, para intuições secundárias à medida que sua experiência cresce. Para Tall[34], o desenvolvimento dessas intuições secundárias deve ser um dos principais objetivos da educação matemática**.**

Bernays[35] adverte que a intuição é algo que o matemático adquire por meio de experiências prévias, i.e., de práticas matemáticas prévias.

As intuições geométricas e as evidências visuais podem e devem ocupar um lugar nos raciocínios geométricos. Mas, para realizar tais raciocínios de modo adequado, as intuições e evidências devem ser interpretadas de uma maneira mais pragmática, cumprindo o papel

[30] Barone, R.; Silveira, R. S. p. 4
[31] Koogan, A.; Houaiss, A. p. 476
[32] Poincaré, p. 19
[33] Fischbein *apud* Tall, D. p. 14
[34] Tall, D. p. 14
[35] Bernays *apud* Visokolskis, S. p. 152

heurístico que, apesar de não confirmar de modo concludente os resultados que se tenta justificar, serve de grande apoio instrumental.[36]

Com relação ao rigor, Sebastiani[37] afirma que se a matemática for apresentada apenas como rigorosa na aplicação momentânea de fórmulas ou esquemas, ela corre o risco de parecer muito artificial. Mas, se a relação professor-aluno percorre o processo intuir-supor-descobrir-avaliar, então o rigor tem sentido. Ele é um critério de certeza que acompanha a curiosidade e qualifica a descoberta; portanto, motiva e desperta o interesse. Para ele, o ensino da matemática não deve se restringir simplesmente à apresentação formal de conteúdos; nem se restringir à demonstração lógica rigorosa. Faz parte do ensino da matemática o estudo histórico. A história permitiria ao professor-aluno perceber que o rigor em matemática é variável com o tempo, que não houve uma única concepção de conhecimento rigoroso e que o rigor, como um critério para alcançarmos a certeza, faz parte da aprendizagem.

Um olhar na história da matemática pode levar a percepção do valor das figuras como recurso utilizado para orientar processos dedutivos, recurso esse que foi sendo eliminado paulatinamente ao longo da história. Na matemática grega as figuras aparecem apoiando as demonstrações. Não devemos abrir mão da intuição e da percepção do real como representantes de processos de inferência em matemática.

Levando em conta tais argumentos e admitindo que a intuição é algo que o matemático adquire das experiências prévias (prática matemática prévia), considero que quanto mais nossos alunos experimentarem diferentes métodos de resolução de problemas, quanto mais ricas forem as experiências em sala de aula, mais eles poderão desenvolver sua intuição e estarão aptos a resolver os mais diversos problemas.

Diante do exposto, podemos concluir que uma abordagem histórica na educação matemática pode ser eficaz[38]:

- Na criação de uma abordagem pedagógica para o ensino da matemática que leva em conta o desenvolvimento cognitivo dos alunos;
- No reconhecimento nos modos de argumentar dos estudantes como correspondendo aos problemas do passado e no encorajamento das suas respostas a situações reais semelhantes àquelas conhecidas da história da matemática.

[36] Visokolskis, S. p. 155
[37] Sebastiani, E. p. 82
[38] Lakoma, E. p. 77

1.3.1. Modos de Incorporar à História da Matemática nas Aulas de Geometria

As reflexões que serão aqui apresentadas não se restringem ao ensino-aprendizagem da geometria, mas podem ser aplicadas às diversas áreas do conhecimento matemático.

Segundo Schubring[39] existem duas maneiras principais de abordar a história da matemática no ensino: a direta e a indireta.

A abordagem direta consiste na introdução de elementos históricos nas salas de aulas. Geralmente propõe-se que isto seja feito por meio de elementos biográficos ou do estudo de textos originais. Para Schubring[40], ambas as formas implicam no risco de não de poder alcançar objetivos substanciais. Os elementos biográficos podem se reduzir a algumas anedotas por não ser possível no âmbito das aulas, entrar na verdadeira matemática das épocas anteriores. A introdução de textos originais pressupõe que o próprio professor e professor-aluno disponham de uma competência histórica e mesmo assim existem sérios problemas didáticos para obter, de fato, êxito na aprendizagem dos alunos. Deve-se levar em conta também a dificuldade em se obter tais textos originais.

Considero que é durante a formação que os professores-alunos devem ser iniciados na busca e estudo de textos originais.

Uma abordagem indireta é proposta por Miguel[41] por meio de um estudo histórico-pedagógico temático que é, antes de mais nada, um estudo que tende a mostrar como a história pode operar em um nível temático específico da matemática na tentativa de revelar todo o seu potencial sócio-cultural, humano e educativo mais amplo. É uma reconstituição histórica de um tema ou tópico específico da matemática que se faz pensando no aluno e no educador matemático, isto é, uma reconstituição histórica com fins estritamente pedagógicos e que tenta ilustrar detalhadamente um modo da história participar organicamente do ensino-aprendizagem da matemática.

Schubring[42] considera que uma forma mais realista de introduzir a história da matemática no ensino seria estabelecer um papel metodológico da história da matemática na formação dos professores de matemática. Assim diz ele,

> a história da matemática poderia contribuir para desenvolver um *meta-saber* dos professores com a função de melhor orienta-los na organização dos

[39] Schubring, G. p. 157
[40] Schubring, G. p. 157
[41] Miguel, A. p.43
[42] Schubring, G. p. 158

> conteúdos para as aulas e na integração e interpretação das contribuições dos alunos.

Fauvel & van Maanen[43] propõem que alguns matemáticos e educadores, por considerarem a matemática intrinsecamente histórica, entendem que a aprendizagem de um assunto matemático deve envolver sua história; e outros vêem diversas formas como a história da matemática pode ajudar na tarefa do professor e, na do aluno.

O modo como a história da matemática pode ser usada no ensino-aprendizagem da matemática, e o argumento para sua incorporação, pode variar de acordo com o nível educacional da classe: crianças no ensino fundamental e estudantes universitários, por exemplo, têm diferentes necessidades e possibilidades.[44] Existem discussões quanto aos níveis de ensino em que esta incorporação deve ocorrer. Grattan-Guiness[45], por exemplo, defende uma história contextualizada apenas para o nível universitário, pois ele considera essa abordagem inútil e ineficaz nos níveis elementares porque as crianças têm pouco ou nenhum sentido do progresso histórico.

Existem dois tipos mais gerais de uso da história da matemática na educação matemática: o implícito e o explícito.

O professor usar a história implicitamente – para ter idéias e para buscar o entendimento das atitudes dos alunos e dos seus processos de aquisição do conhecimento – significa que o objetivo não é a historia em si, mas um meio de obter sugestões que definam caminhos para o ensino, tendo em mente objetivos didáticos.

Se o professor decide introduzir a história explicitamente em sala de aula, pode fazê-lo como parte de uma abordagem global em termos de uma estratégia didática, ou de um modo local no contexto apenas do ensino de um tópico. Ele pode querer dar um contexto cultural ao conhecimento matemático localizando-o dentro da história da humanidade e das idéias.

Entre as diversas formas de utilizar a dimensão histórica no ensino-aprendizagem da matemática e na formação de professores quero destacar o uso de problemas históricos.

A história da matemática contém uma riqueza de materiais que podem ser usados em sala de aula com o objetivo de ampliar o conhecimento matemático dos alunos e contribuir para que as metas e objetivos da educação matemática possam ser atingidos. Entre esses materiais estão os problemas históricos e os métodos utilizados para resolvê-los. Esses problemas

---

[43] Fauvel , J.; Maanen p. xiii
[44] Fauvel, J.; Maanen, J. p. 255
[45] Grattan-Guiness, I. *apud* Byers, V. p. 60

permitem-nos tocar no passado, mas também ressaltar o presente. Questões que se originaram há centenas ou milhares de anos podem ser entendidas e respondidas nas aulas de hoje.[46]

Um dos modos de utilizar a história da matemática para auxiliar no surgimento de idéias, ilustrar seu desenvolvimento e chamar a atenção dos estudantes é o uso de temas baseados em problemas ao invés da ênfase em personalidades.

Esta abordagem não integra simplesmente a história da matemática no ensino, mas também equipa os estudantes com diferentes dispositivos intuitivos e *insights*; é útil no crescimento das habilidades matemáticas dos estudantes; permite que professores e estudantes pensem a matemática como uma disciplina de reflexão contínua e ação influenciada por considerações, raciocínios, produção de conhecimento, intuição, experimentação e aplicação a situações práticas. Ela demonstra que a matemática, como todos os outros assuntos que os alunos estudam na escola, não é simplesmente um assunto no qual aprendemos uma série de verdades inquestionáveis e imutáveis. Abre o caminho no qual o estudo da matemática também contribui para o estudo dos modos como os diferentes povos vêm a saber coisas e a descobrir como novos conhecimentos podem ser usados construtivamente sem descartar ou depreciar conhecimentos velhos de diferentes épocas e lugares[47].

O uso de problemas históricos não apenas ajuda a demonstrar estratégias de resolução de problemas e a aguçar as habilidades matemáticas, mas também[48]:

- Dá um sentido de continuidade aos assuntos matemáticos na época em que o mesmo problema ou tipo de problema pode ser encontrado e em diferentes sociedades e em diversos períodos;
- Ilustra como a solução de um problema se desenvolveu historicamente: o modo como resolvemos o problema hoje pode ser comparado aos processos usados em outras épocas e em outros grupos sociais;
- Fornece idéias históricas e culturais dos povos e épocas envolvidas.

O contato que a história da matemática nos proporciona com as diversas formas que cada uma das civilizações utilizou para resolver problemas matemáticos considerados por elas significativos, propicia oportunidades para o desenvolvimento de capacidades de resolver problemas, tomar decisões, fazer inferências e criar – habilidades estas que fazem parte do

---

[46] Swetz, F. J. p. 208
[47] Grugnetti, L & Rogers L. p. 49
[48] Swetz, F. J. p. 201-202

grupo de capacidades a serem desenvolvidas, por exemplo, já no Ensino Fundamental e Médio. [49]

Existe um certo consenso entre aqueles que defendem uma abordagem histórica no ensino-aprendizagem da matemática de que incursões históricas baseadas em problemas criados por nossos antepassados enriquecem o trabalho em sala de aula.

Ao trabalhar com problemas que aparecem na história da matemática de diversas civilizações, o professor tem condições de propiciar a seus alunos oportunidades para desenvolver habilidades como: selecionar e analisar informações, formas e processos de pensar matemáticos; avaliar limites, possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações.

Atividades sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões e a capacidade de argumentação são elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento.

Por outro lado, no decorrer deste trabalho pude perceber que as atividades sobre resolução de problemas permite lançar mão de outros recursos da história nas aulas de matemática, como alguns dos modos propostos por Fauvel[50], a saber:

- Mencionar curiosidades dos matemáticos do passado;
- Dar uma introdução histórica aos conceitos que são novos para os alunos;
- Encorajar os alunos a entenderem os problemas históricos para os quais os conceitos que eles estão aprendendo são as respostas;
- Dar aulas de "história da matemática";
- Desenvolver aulas ou exercícios usando textos matemáticos do passado;
- Estabelecer projetos sobre atividades matemáticas locais do passado;
- Usar exemplos críticos do passado para ilustrar técnicas ou métodos;
- Explorar concepções alternativas do passado para ajudar a entender e resolver dificuldades dos aprendizes de hoje;

---

[49] PCN- Ensino Médio, p. 40 ; PCN-Ensino Fundamental, p. 25
[50] Fauvel, J. p. 4

- Desenvolver uma abordagem pedagógica para um tópico de acordo com seu desenvolvimento histórico;
- Desenvolver a ordem e estrutura dos tópicos no currículo sobre a base das informações históricas.

Cada um desses modos pode ser incorporado às atividades a serem desenvolvidas pelos futuros professores.

Em um curso de formação de professores considero que uma distinção importante deve ser feita entre usar a história da matemática no ensino da matemática e ensinar a história da matemática como um assunto. Isto é necessário para não gerar dúvidas entre os professores-alunos que podem ter receio de que estão sendo encorajados a ensinar um assunto que eles pouco conhecem e que não está no programa, que é a história da matemática, quando o que se busca é explorar os modos de ajudar a tornar o próprio ensino da matemática mais rico e mais variado e, de certo modo, efetivo. Dúvidas podem surgir por não estar clara esta distinção fundamental[51].

É importante que o professor aprenda a história da matemática de um modo que o torne capaz de utilizar seus recursos no ensino da matemática e não para ensinar a história da matemática.

1.4. A História da Geometria e a Formação de Professores

Vários são os autores que consideram a figura do professor central, para que as transformações que se fazem necessárias na escola e na sociedade ocorram. Há um consenso com relação à relevância desse profissional no processo educativo e de seu papel como agente transformador da realidade. Nesse sentido, o professor precisa refletir sobre a concepção de escola como instituição que transmite o conhecimento e como local que ajuda o aluno a desenvolver seu potencial, que ensina a pensar, que ajuda a descobrir caminhos para transformar a sociedade em que vive.

Segundo Perez[52]

> é mais valorizado um trabalhador que tem idéias originais, inovadoras e que pode auxiliar a resolver situações-problema, em oposição a quem nunca demonstrou criatividade em sua atividade. São "mentes criativas" que ajudarão a manter a situação estável e, se possível, melhora-la ainda mais.

---

[51] Fauvel, J. p. 5
[52] Perez, G. p. 267

Cabe portanto ao ensino promover o desenvolvimento da criatividade. Preparar os professores-alunos para assumir tal responsabilidade exige que durante a formação a sala de aula seja um lugar onde os professores-alunos tenham plena liberdade de se expressar, criar, desenvolver seu raciocínio e sua originalidade, de descobrir por eles mesmos caminhos diferentes de chegar às respostas e que esses professores-alunos tomem consciência de que eles são os principais construtores desse ambiente e o aluno, um ser único, com características próprias que devem ser estimuladas.

Perez[53] afirma que

> O professor para conseguir trabalhar dessa maneira deve ter características próprias, ser ele mesmo criativo e ter uma formação que lhe dê meios para trabalhar desta maneira e assumir estes alunos.

A formação do professor deve portanto, entre outras, coisas:

- Formar um profissional reflexivo-crítico, investigador na sala de aula, e demais dependências da escola, participativo na organização pedagógica e membro de uma comunidade social e educativa.

Polettini[54] sugere que os programas de formação do professor de matemática devem propiciar oportunidades que levem a refletir sobre as experiências (matemáticas e não-matemáticas) passadas e presentes, buscar a discussão do conteúdo a ser ensinado, de como lecionar este conteúdo e do currículo de forma integrada sempre que possível; incentivar trabalhos baseados na colaboração entre os alunos e entre os docentes; propiciar oportunidades de experiências com escolas do ensino fundamental e médio e alunos o mais cedo possível; incentivar a discussão de uma visão de Educação Matemática, e não de Ensino de Matemática, que deva permear todo o trabalho.

Os futuros professores de matemática devem ser formados para atender à demanda da sociedade diante do desenvolvimento tecnológico e para auxiliar na formação dos futuros profissionais das diferentes áreas ou nas gerações futuras, a fim de que eles possam se adaptar a este desenvolvimento. Eles devem também ser preparados para fornecer aos alunos conteúdos ligados a sua realidade tendo o cuidado na apresentação da linguagem matemática.[55]

---

[53] Perez, G. p. 268
[54] Polettini, A. F. F. p. 258
[55] Fainguelernt, E. K. p. 60

No ambiente de sala de aula, os professores-alunos e os alunos devem propor, explorar e investigar problemas de matemática e para isso, a sala de aula deve propiciar um ambiente de pesquisa matemática onde a curiosidade e o desafio servem de motivação intrínseca aos alunos.

O professor-aluno e o professor devem ser formados para atender a esta demanda. Ele deixa de ser um detentor do saber e passa a ser um membro integrante dos grupos de trabalho que tem mais experiência e possibilidade de propor atividades que motivem os alunos.

As pesquisas sobre a ação dos professores mostram que, em geral, o professor ensina da maneira como lhe foi ensinado.[56]

Assim, o professor-aluno no seu aprendizado das disciplinas de conteúdo matemático no ensino superior deve ser levado a agir, a investigar, a explorar situações e aplicações que o levem a construir seu próprio conhecimento, assim como ser levado a realizar uma análise histórica, sociológica e política do desenvolvimento de cada disciplina.[57]

É importante que os professores-alunos vivenciem experiências matemáticas, que levem aos processos de redescoberta, caracterizadas pela identificação de problemas, solução desses problemas, argumentando sobre as soluções propostas, tendo possibilidade de refletir sobre seu fazer matemático para construir o saber matemático.[58]

Se desejarmos que o professor do ensino fundamental e médio se utilize da história da matemática como recurso pedagógico, faz-se necessário que este recurso seja aplicado e discutido durante sua formação.

A história da matemática, juntamente com as demais tendências em educação matemática – resolução de problemas, modelagem, etnomatemática e informática – é um dos instrumentos que vem tendo destaque no movimento de Educação Matemática na busca de propostas didático-pedagógicas que possam viabilizar a eficácia do ensino-aprendizagem da matemática. É importante porém, ressaltar que a viabilização, por parte do professor, da história da matemática como instrumento metodológico, exige que este, além de conhecer o conteúdo matemático como objeto de ensino, deve conhecer também a história deste conteúdo. Isto leva a considerações sobre a história da matemática na formação do professor de matemática.[59]

---

[56] Fainguelernt, E. K. p. 63
[57] Fainguelernt, E. K. p. 63
[58] Fainguelernt, E. K. p. 62
[59] Baroni, R. & Nobre, S. p. 130

Pesquisadores de várias partes do mundo concordam que a história da matemática desempenha um papel importante no ensino-aprendizagem da matemática, que a história e o ensino da matemática estão de alguma forma relacionados e que uma abordagem histórica deve ser incorporada à prática docente. Sendo assim, a história também desempenha um papel especialmente importante na formação de professores. Portanto, o professor de matemática, em sua formação deve estudar a história da matemática.

Byers[60] considera, porém, a questão do que devem fazer os professores-alunos com a história que aprenderam nos cursos de formação e eu entendo esta pergunta como diretamente associada a outra: como a história da matemática deveria ser trabalhada nestes cursos?

Quando falamos de uma abordagem histórica em um curso de formação de professores devemos considerar alguns aspectos:

- A importância da dimensão histórica no ensino-aprendizagem dos conteúdos necessários a esses professores em formação.

As diretrizes curriculares para os cursos de licenciatura propõem que os currículos de licenciatura em matemática devem ser elaborados de modo a, entre outras coisas, desenvolver a habilidade de identificar, formular e resolver problemas e a capacidade de compreender, criticar e utilizar novas idéias e tecnologias para a resolução de problemas.

Proponho que no estudo dos conteúdos matemáticos que fazem parte do currículo da licenciatura os professores que ministram as disciplinas que tratam destes conteúdos incluam aspectos relacionados com história e filosofia e, analisem o desenvolvimento histórico do assunto abordado. Esta análise pode trazer para sala de aula uma reflexão sobre os problemas e métodos de solução que estão relacionados com o tema em estudo e pode ser um dos modos de desenvolver tais competências. As considerações feitas no item 1.4 deste capítulo a respeito da dimensão histórica no ensino-aprendizagem da matemática devem ser levadas em conta pelos professores que ministram disciplinas de conteúdo matemático nos cursos de formação e justificam esta proposta.

Este trabalho apresenta nos capítulos posteriores algumas propostas de como a dimensão histórica pode ser utilizada pelos professores como ferramenta pedagógica no ensino-aprendizagem do conteúdo geométrico desses cursos de formação.

[60] Byers, V. p. 1.

Um outro aspecto a ser considerado quando tratamos de uma abordagem histórica em um curso de formação de professores é

- A importância do conhecimento da história da matemática na formação do futuro professor e se esse conhecimento deve ser adquirido através de disciplinas de história da matemática ou da inserção do componente histórico referente ao conteúdo matemático que está sendo desenvolvido em cada disciplina do curso.

Um dos problemas que tem sido reconhecido a respeito das relações entre a história da matemática e o ensino-aprendizagem da matemática é que ele requer professores cujo conhecimento vai além dos conteúdos matemáticos como objetos de ensino.

Fasanelli[61] afirma que

> o professor que conhece pouco a história da matemática está apto a ensinar técnicas isoladas, não relacionadas nem aos problemas e idéias que as geram ou aos outros desenvolvimentos que surgiram delas.

Para o autor, o conhecimento dos argumentos e divergências entre grandes matemáticos deve induzir um saudável ceticismo e discussão em sala de aula conduzindo ao firme entendimento dos conceitos e princípios matemáticos. Um dos mais valiosos bens que o professor pode adquirir do conhecimento da história de seu assunto é uma apreciação da influência das tradições. É importante que o aluno [professor-aluno, principalmente] conheça que muito do que é ensinado hoje como produto acabado foi o resultado de séculos de buscas ou de ardente controvérsia.[62]

Considero que é durante a formação que os professores-alunos devem adquirir o conhecimento da história da matemática, de como as idéias matemáticas se desenvolveram historicamente e de como transpor este conhecimento para atividades em sala de aula, atentos aos obstáculos e caminhos encontrados durante o desenvolvimento histórico destas idéias. Isto levaria os professores em formação, entre outras coisas, a:

- entender melhor as dificuldades de seus alunos. A história da matemática permite o levantamento de questões que possibilitam discutir algumas dúvidas dos alunos que são freqüentes na construção pedagógica de alguns conceitos.[63]

[61] Fasanelli, F. p. 38
[62] Fasanelli, F. p. 38
[63] Brito, A. & Miorim, M. A. p. 264

- perceber a importância de recorrer ao conhecimento histórico para identificarem as dificuldades e encontrarem caminhos que ajudariam seus alunos a superarem os obstáculos;[64]

- sentir necessidade de avaliar os tipos de decisões a serem tomadas com relação aos modos de como os conteúdos matemáticos devem ser trabalhados em sala de aula tomando como referência a história de como tais conteúdos se desenvolveram em várias civilizações. A história é um excelente meio de começar uma reflexão profunda sobre os conteúdos ensinados e programas[65];

- perceber que a história da matemática, como uma ferramenta de ensino pode ajudar o professor a alcançar o objetivo de ensinar pelo significado e compreensão[66];

- ver a ligação que existe entre a matemática, a educação matemática e as concepções gerais dos povos em cada época e em cada lugar.[67]

- ter uma visão da matemática como parte da cultura humana e que possam ver a matemática em seu dia a dia.

Além de dominar episódios da história da matemática relacionados àquilo que queremos tratar em sala de aula, Radford[68] levanta duas questões metodológicas a serem consideradas na formação do professor, as quais considero que devem permear todo o trabalho desenvolvido com professores em formação:

- Especificar o que significa um episódio da história da matemática interessante, como localizá-lo e extraí-lo;

- Como apresentar o episódio escolhido aos estudantes. Isto exige, segundo Radford, um trabalho complexo de adaptação e manuseio das "peças" para que a história possa tornar-se uma ferramenta genuína e útil para promover o ensino-aprendizagem.

Pesquisas histórico-pedagógicas tornam mais precisas as semelhanças estruturais nos processos da história e da pedagogia.[69] Identificar as condições históricas que deram lugar ao

---

[64] Byers, V. p. 1
[65] Jones, P. S. p. 5
[66] Jones, P. S. p. 2
[67] Fasanelli, F. p. 30
[68] Radford, L. p. 271
[69] Jones, C. V. p. 42

desenvolvimento de um determinado conceito, ou a solução de um determinado problema poderia sugerir por analogia aquelas condições que dariam lugar à aprendizagem.

É comumente reconhecido que em matemática (especialmente) ensinamos tomando como modelo o lógico-dedutivo, mas o desenvolvimento histórico da matemática não é lógico. Estudos históricos sobre como se dá o processo criativo em matemática mostram uma variedade de técnicas não dedutivas – analogias, tentativa e erro, simplificação, considerar casos extremos, esquemas, diagramas e outras técnicas heurísticas entram na matriz dos processos criativos também.

Quando estudamos o desenvolvimento histórico da matemática, encontramos estes processos e quando olhamos para a aprendizagem em matemática também o encontramos. Assim, o processo criativo tanto na história quanto na aprendizagem compartilham da mesma estrutura. Além disso, não são processos lineares e, quando ensinamos, usamos modelos lineares simples.[70]

O conhecimento dessas relações, entre processo histórico e de aprendizagem muda claramente a relação entre professor e aluno. O diálogo em sala de aula seria muito mais centrado no aluno porque o professor se tornaria mais um facilitador da aprendizagem do que uma fonte de todo o conhecimento.

- A formação de professores deve ser capaz de transformar e melhorar o sistema de crenças e percepções dos professores em formação acerca da natureza da matemática, dos objetivos da educação e das ações em sala de aula na esperança de que tais mudanças melhorem o comportamento em sala de aula, embora não se possa assumir que mudanças nas crenças serão necessariamente traduzidas em mudanças na prática.

Segundo Philippou & Christou[71], crenças e atitudes são organizadas em torno de um objeto ou situação por experiência, predisposição a responder de modo favorável ou não. Crenças são proposições que são aceitas como verdade pelo indivíduo; elas constituem o conhecimento subjetivo do indivíduo sobre si e o ambiente, físico ou mental. Crenças são pensamentos que dirigem a ação, mas a experiência e reflexão sobre a ação podem modificar as crenças. Atitudes incluem motivação, interesse, confiança, perseverança, vontade para se arriscar, tolerância e resistência a fechamentos prematuros.

---

[70] Jones, C. V. 42
[71] Philippou & Christou, p. 114

Uma jornada através da história da matemática capacitaria os estudantes a construírem significados matemáticos e a apoiarem suas novas concepções sobre a matemática mudando suas crenças e atitudes com relação à matemática e seu ensino.

A inclusão da dimensão histórica nos cursos de formação daria a oportunidade para o desenvolvimento do entendimento do que é a matemática, e permitiria uma melhor compreensão dos conceitos e teorias.[72]

De acordo com Barbin[73], a história da matemática poderia mudar a percepção e entendimento dos professores sobre a matemática, influenciando na maneira como ela é ensinada, e finalmente afetando o modo de como os estudantes a percebem e entendem.

Um dos meios de mudar as crenças que os professores possuem sobre a matemática e sua prática seria encorajando-os a pensarem a matemática como sendo um processo contínuo de reflexão e desenvolvimento, ao invés de encará-la como uma estrutura definida, composta de "verdades". Pensar sobre a matemática como uma atividade intelectual, ao invés de um produto pronto e acabado, significa pensar em problemas a serem resolvidos, na importância das conjecturas e no valor das intuições.[74] A dimensão histórica pode trazer portanto uma mudança na abordagem do professor, sem que necessariamente o elemento histórico esteja explicitamente presente nas aulas. O conhecimento histórico ajuda o professor a entender estágios na aprendizagem bem como a propor problemas inspirados na história.[75]

Segundo Trigo[76], os professores de matemática ensinam esta disciplina de acordo com certas idéias que dela têm e de como deve ser aprendida pelos estudantes e estas idéias possuem certa relação com os fundamentos ou natureza desta disciplina e sua relação com a aprendizagem.

- A consciência histórica leva os professores a mudarem o modo como eles pensam acerca de seus alunos.

As respostas que os alunos dão aos problemas históricos tomam um novo caráter quando elas são comparadas com as respostas apresentadas pelos matemáticos através dos tempos.

Análises histórico-epistemológicas ajudam o professor a entender porque os alunos têm dificuldades para entender e aprender certos conceitos e podem ajudá-los também a

[72] Barbin, E. p. 63
[73] Barbin, E. p. 63
[74] Barbin, E. p. 64
[75] Barbin, E. p. 64
[76] Trigo, L. M. S. p. 419

desenvolver novas estratégias de ensino.[77] Como conseqüência, o professor adota uma atitude construtiva em relação aos erros dos alunos.

Alguns professores consideram que a transformação da imagem da matemática que a história lhes permitiu ter não só modificou sua maneira de ensinar, mas também suas relações educacionais. Eles têm os meios para entender os erros de seus alunos, porque agora conhecem os obstáculos, mas também, que tanto o erro como a hesitação ou aproximação, são demonstrações do pensamento ativo.[78]

- Em um curso de formação de professores é importante que os alunos conheçam as interações da matemática com outras disciplinas e com outros componentes culturais e o que leva uma determinada cultura a desenvolver técnicas para resolver alguns problemas.

Os estudos do processo criativo em matemática revelam uma variedade de técnicas não dedutivas – analogias, tentativas e erros, simplificações, esquemas e digramas, e outras técnicas heurísticas. Estes, também, são encontrados tanto no desenvolvimento histórico da matemática, quanto nos estudos sobre como se dá a aprendizagem. Assim, segundo Jones[79], o processo criativo em história e na aprendizagem compartilha da mesma estrutura: são processos complexos e não lineares.

Em um curso de formação de professores deve-se criar um ambiente que coloque em prática métodos e técnicas pedagógicas que levem os alunos a vivenciarem o processo criativo inerente à matemática levando em conta o nível de escolaridade do aluno. Que esses futuros professores tenham uma consciência crítica e renovadora da relação pedagógica tradicional e que seja problematizada e questionada a transmissão dogmática dos saberes matemáticos.

Torna-se necessário, portanto, que as disciplinas do curso de formação de professores não adotem a postura simplista de apresentar os saberes como realidades abstratas, que venham a satisfazer necessidades do campo teórico, mas nesses cursos, deve-se criar um estado de ânimo propício à produção das condições indispensáveis para (re)criar os saberes de base; que estimulem a participação dos alunos mediante uma estratégia pedagógica em virtude da qual descubram que novos saberes vêm responder perguntas que eles formularam. Aqui a história da matemática pode fornecer fontes de inspiração pedagógica e recursos didáticos. A história pode contribuir para despertar este estado de ânimo.

---

[77] Barbin, E. p. 64
[78] Barbin, E. p.6
[79] Jones, C. V p. 10

Segundo Arboleda[80], “a história é um meio para tomar consciência do funcionamento da investigação em matemática”. E esta característica pode ser utilizada a favor da formação matemática daqueles que ensinarão matemática.

1.5. Bibliografia

ARBOLEDA, L. C. História e Enseñanza de las Matematicas. **Epistemologia, Historia y Didacta de la Matematica**, Bogotá, 1983.

BARBIN, E. Histoire et Enseignement des Mathematiques: Pourqoi? Comment? **Bulletin AMQ**, Montreal, v. 37, n. 1, p. 20-25, 1996.

BARBIN, E. Integrating history: research perspectives In: FAUVEL, J.; van MAANEN, J. **History in Mathematics Education. The ICMI Study.** 1a. ed. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. 2. p. 63-70.

BARONE, D.; SILVEIRA, R. S. **Uma Introdução à Ciência Cognitiva** Acesso em: 19 jun. 2003.

BARONI, R. L. S. & NOBRE, S. A Pesquisa em História da Matemática e suas Relações com a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educaçào Matemática: Concepções & Perspectivas.** 1a. ed. São Paulo: UNESP, 1999. 7. p. 129-136.

BASTOS, R. **Geometria no Currículo e Pensamento Matemático.** Disponível em: <www.apm.pt/apm/revista/edu52/edu52_2.htm> Acesso em: 11 jun. 2003.

BOS, H. J. M.; MEHRTENS, H. The Interactions of Mathematics and Society in History some Explorations Remarks. **Historia Mathematica**, v. 4, p. 7-30, 1977.

BRITO, A. J.; MIORIM, M. A. A História na Formação de Professores de Matemática In: III SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 1999, Vitória. **Anais.** Vitória, 1999. p. 255-274.

BYERS, V. Por que Estudar a Históriada Matemática? **International Journal matematics Education, Science and Technologie**, v. 13, n. 1, p. 59-66, 1982.

FAINGUELERNT, E. K. A Prática de Ensino e a Formação do Professor de Matemática **Boletim GEPEM. ANO XIX**, Rio de Janeiro, n. 33, p. 60-72, 1995.

---

[80] Arboleda, p. 20

FAUVEL, J. Using History in Mathematics Education. **For the Learing of Mathematics**, v. 11, p. 3-6, Junho 1991.

FAUVEL, J.; van MAANEN, J. The Role of the Hstory of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics: Discussion Document for an ICMI Study. 1997-2000 **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 34, p. 255-259, 1997.

FURINGHETTI, F.; SOMAGLIA, A. Storia Della Matematica in Classe **L'Educazione Matematica**, Itália, v. 2, p. 22-46, 1997.

GRABINER, J. V. Matemático e o Historiador. **Historia Mathematica**, v. 2, p. 439-447, 1975.

GRUGNETTI, L.; ROGERS, L. Philosophical, Multicultural and interdisciplinary Issues In: FAUVEL, J.; van MAANEN, J. **History in Mathematics Education. The ICMI Study.** 1a. ed. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. 2. p. 39-61.

GRUGNETTI, L. Ancient Problems for the Development of Strategic Thinking. In: FAUVEL, J.; van MAANEN, J. **History in Mathematics Education. The ICMI Study.** 1a. ed. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. 3. p. 78-81.

JONES, C. V. Finding Order in History Learning: Definig The History and Pedagogy of Mathematics In: MEETING OF THE INTERNATIONAL STUDY GROUP ON ELATIONS BETWEEN HISTORY AND PEDAGOGY OF MATHEMATICS, 1994, Blumenau. **Proceedings.** , 1994. p. 35-54.

JONES, P. S. The History of Mathematics as a Teaching Tool In: BAUMGART, J. K. *et al* **Historical Topics for the Matehematics Classroom.** 2a. ed. USA: National Council of Teachers Mathematics, 1989. p. 17.

KOOGAN, A.; HOUAISS, A. **Enciclopédia e Dicionário Ilustrado.** Rio de Janeiro: Edições Delta, 1996. 1635 p.

LAKOMA, E. Stochastics Teaching and Cognitive Development In: FAUVEL, J.; van MAANEN, J. **History in Mathematics Education. The ICMI Study.** 1a. ed. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. 3. p. 74-77.

MEC- SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** 1a. ed. Brasília, 1998. 58 p.

MEC-SECRETARIA DE ENSINO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática - 5a. à 8a. séries.** Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

MIGUEL, A. Estudos histórico-pedagógicos Temáticos e História-Problema. In: HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1996, Braga. **Proceedings. Actes. Actas Vol. II.** Braga, 1996. p. 43-64.

NOBRE, S. Introdução à História da Matemática: Das Origens ao Século XVIII. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, v. 2, n. 3, p. 3-43, abr. 2002.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causa e conseqüências. **Zetetiké. Ano 1. No. 1**, São Paulo, p. 7-17, março 1991.

PEREZ, G. Formação de Professores de Matemática sob a perspectiva do Desenvolvimento Profissional. In: BICUDO, , M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática.** 1a. ed. São Paulo: UNESP, 1999. p. 263-282.

PHILIPPOU, G.; CHRISTOU, C. A Pre-service Programme for Primary Teachers Implemented in Greece and Cyprus In: FAUVEL, J.; van MAANEN, J. **History in Mathematics Education. The ICMI Study.** 1a. ed. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. 4. p. 113-117.

POINCARÉ, H. **O Valor da Ciência.** Tradução. M. H. F. Martins.1a. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 1998. 173 p.

POLETTINI, A. F. F. Análise das Experiências Vividas Determinando o Desenvolvimento Profissional de Professor de Matemática. In: BIGUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática.** 1a. ed. São Paulo: UNESP, 1999. 14. p. 247-261.

RADFORD, L. Historical Formation and Student Understanding of Mathematics In: FAUVEL, J.; van MAANEN, J. **History in Mathematics Education. The ICMI Study.** 1a. ed. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. 5. p. 143-148.

RADFORD, L. History, Research and the Teaching of Mathematics In: HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1996, Braga. **Proceddins. Actes. Actas..** Braga, 1996. p. 271-274.

SAITO, K. Doubling the Cube: A new Interpretation of its Significance for Early Greek Geometry. **Historia Mathematica**, v. 22, p. 119-137, 1995.

SCHUBRING, G. Relações entre História e o Ensino da Matemática. In: 2o. ENCONTRO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA & SEMINÁRIO NACIONAL

DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 1997, Águas de São Pedro-SP. **Anais-Actas.** São Paulo, p. 157-163.

SEBASTIANI, E. Como Usar a História da Matemática na Construção de uma Educação Matemática com Significado. In*:* III SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 1999, Vitória. **Anais.** Vitória, 1999. p. 22-33.

SEBASTIANI, E. O Uso da História no Ensino da Matemática: uma abordagem transdiciplinar. In: **Contribuições da Interdisciplinariedade para a Ciência, para a Educaçao, para o trabalho sindical.** 1a. ed. São Paulo: Vozes, 1994. p. 78-88.

SWETZ, F. J. Problem Solving from the History of Mathematics In*:* HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1996, Braga. **Proceedings. Actes. Actas.** Braga, 1996. p. 201-208.

TRIGO, L. M. S. La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas **Mathesis** , v. 9, p. 419-432, 1993.

VISOKOLSKIS, S. Intuiciones Geométricas y Percepción Visual em la Concepción Griega de la Matemática: Ser o No Ser In*:* HPM, 1994, Blumenau. **Proceedings.** Blumenau, 1994. p. 145-155.

2. Algumas Civilizações e Povos

2.1. Introdução

No capítulo1 deste trabalho faço algumas considerações sobre os diversos usos da dimensão histórica em um curso de formação de professores, sua importância para o ensino-aprendizagem da matemática, na escolha de estratégias didáticas e na compreensão das atitudes dos alunos frente ao conhecimento matemático.

Considerando que o uso da dimensão histórica exige que o conhecimento matemático e os modos de lidar com este conhecimento não sejam vistos de forma isolada mas levando em consideração as épocas e os ambientes sócio-culturais onde foram desenvolvidos e, que,

- A matemática se desenvolve em um contexto social, é afetada por fatores sociais e exerce influência sobre a sociedade;
- A matemática pode ser influenciada pelo estilo de pensamento de uma cultura e do período e, reciprocamente, pode influenciar o modo geral de pensar dos indivíduos desta cultura;
- Os aspectos sociais podem dar uma melhor compreensão da forma como os diversos grupos sociais desenvolveram seu conhecimento matemático e da relevância deste conhecimento para estes grupos;
- A mais óbvia influência da matemática em uma sociedade está relacionada com a aplicação dos métodos matemáticos a problemas práticos desta sociedade e que o valor desta influência pode ser vista na importância social dos problemas resolvidos. Tais problemas, podendo ser de grande significado social, como o cálculo de imposto, a construção de sistemas de irrigação, dados sobre impacto ambiental, distribuição de trabalho, construção de depósitos para alimentos, transações comerciais, construção de habitações, templos e monumentos em geral, etc... ou seu efeito sobre a sociedade, não sendo tão evidente como no uso de decorações geométricas nas criações artísticas, por exemplo;
- É importante conhecer as formas sociais nas quais a matemática se manifesta em um determinado grupo social;
- No trabalho com a história da matemática de um determinado período é importante estar atento à posição social da matemática desse período, aos modos de

comunicação, a seus objetivos implícitos, aos modos deles justificarem suas atividades, etc;

proponho que os professores-alunos tenham a oportunidade, em sua formação, de conhecerem e refletirem sobre o ambiente físico onde estes povos vivem ou viveram, a história política e social dos diversos povos cujo conhecimento matemático está sendo estudado, as diversas fontes deste conhecimento e a sua cultura.

Não é objetivo deste capítulo fazer um estudo exaustivo da história dos povos aqui estudados, mas trazer alguns dados encontrados na bibliografia consultada que considero relevantes para uma melhor contextualização e compreensão dos modos como se desenvolveu o conhecimento geométrico destes grupos sociais.

2.2. As origens

A pré-historia da atividade produtiva do homem, do pensamento e da linguagem começou com o aparecimento do *homo sapiens* por volta do ano 50000 a.C. e com a formação das sociedades primitivas iniciada nesta época e que durou aproximadamente até o ano 10000 a.C. Tais homens assemelhavam-se, biologicamente, ao homem moderno, viviam da caça, fabricavam e utilizavam instrumentos e utensílios variados como anzóis, arpões, arco e flecha, etc, cozinhavam seus alimentos e, apesar de não construírem casas, exceto algumas choupanas simples em regiões escassas de abrigos naturais, não levavam uma vida inteiramente nômade. Além disso, a vida grupal era mais organizada do que nos períodos anteriores.

Historiadores consideram que a espantosa perícia demonstrada na construção de armas e instrumentos, bem como a técnica altamente desenvolvida das criações artísticas, dificilmente teriam sido alcançadas sem uma certa divisão do trabalho.

Com relação às idéias sobre mundo, estas tinham aspectos sobrenaturais, dispensavam cuidados aos seus mortos e formulavam um complicado sistema de magia destinada a aumentar suas provisões de alimentos. Esta magia baseava-se no princípio de que a imitação de um resultado desejado acarretava esse resultado.

Esse homem primitivo, na contínua luta com a natureza que o rodeava, obteve seus primeiros conhecimentos matemáticos e astronômicos. Descobrimentos arqueológicos (armas, cerâmicas, tecidos etc) mostram o uso de formas e idéias geométricas na decoração e construção de objetos, utensílios domésticos, instrumentos, criações artísticas, etc.

Após um período de transição que vai de 10000 a.C. a 5000 a.C. quando as populações se tornaram mais sedentárias e descobriram novas fontes de alimentos surge uma nova cultura, a

Neolítica, que se inicia com a mudança em determinadas regiões da terra, da relação do homem com a natureza e dos homens entre si. Assim, uma economia que era baseada na caça e coleta começa a ser substituída pela agricultura e criação de gado surgindo neste momento a primeira divisão social do trabalho.

As populações, neste período, exerciam maior controle sobre o meio ambiente e tinham menos probabilidade que as anteriores de perecerem devido a mudanças climáticas ou pela falta de alimentos. Estas vantagens resultaram no desenvolvimento da agricultura e na domesticação de animais. Enquanto, todas as populações anteriores eram coletoras, as populações neolíticas produziam alimentos. O cultivo da terra e a manutenção de rebanhos e manadas proporcionavam-lhes fontes muito mais seguras de alimentos e, em certas épocas, garantiam o excedente. O desenvolvimento da agricultura criou condições para uma vida sedentária e possibilitou o aumento da população.

Essa nova cultura também foi importante por ter sido a primeira a distribuir-se por todo o mundo. Com relação à cultura, estas populações criaram a arte de tecer malhas e panos, foram as primeiras a fabricar utensílios de cerâmica e sabiam produzir fogo por atrito; construíam casas de madeira e de barro secado ao sol e, no final do período, descobriram as possibilidades do trabalho com metais.

Como uma das conseqüências do sedentarismo neolítico está o desenvolvimento de instituições duradouras: a família, a mais antiga das instituições, aparece com clareza e parece ter sido dominada pelo patriarca; a religião e o estado.

O artesanato e o comércio e, com ele o desenvolvimento das forças produtivas, possibilitaram e estimularam a formação e consolidação de conhecimentos científicos.

As primeiras civilizações surgiram entre 3500 e 500 a.C. e entre elas estão a do Egito, da Mesopotâmia, da China e do Vale do Indo. Um dos fatores favoráveis ao surgimento de civilizações nestas regiões é o ambiente geográfico favorável já que todas surgem em vales de rios onde as terras eram facilmente cultiváveis. Portanto, todas estas sociedades são exemplos de sociedades altamente dependentes da agricultura, de sistemas de irrigação e da astronomia para os quais a matemática foi desenvolvida.

2.3. A Mesopotâmia

A civilização mesopotâmica é provavelmente a mais antiga civilização do mundo, começou por volta de 3500 a.C. nos vales dos rios Tigre e Eufrates. No passado foi chamada de babilônica ou babilônico-assíria, embora não tenha sido fundada nem pelos babilônios nem pelos assírios e sim com o surgimento das cidades-estado sumérias.

A Mesopotâmia[1], antigo nome grego do atual Iraque, é uma faixa de terra de cerca de 1100 km de comprimento formada pelos vales dos rios Tigre e Eufrates [Figura 3.1]. Séculos de drenagem dos dois grandes rios, que se originam na parte mais elevada do país, bem como as inundações anuais, criaram um solo de grande riqueza nas áreas em torno dos deltas.

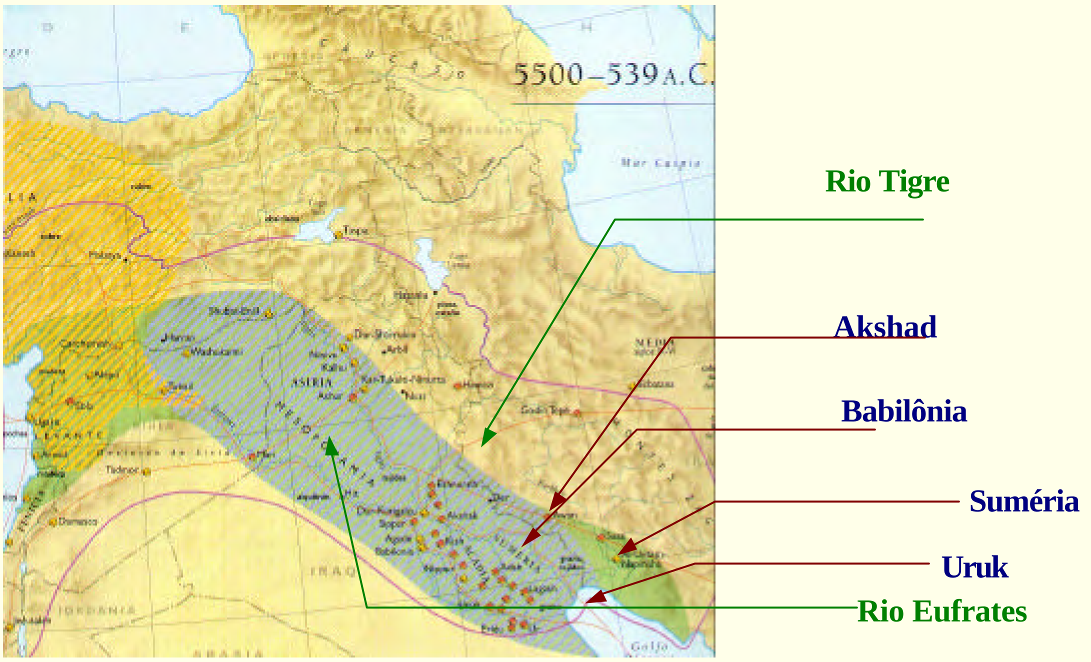


Figura 3.1

Nos tempos primitivos era possível plantar mais do que o necessário para o consumo diário e o excedente propiciou o surgimento da vida urbana. Além disso, havia possibilidade de pesca no mar do golfo pérsico.

As repentinas e violentas mudanças de curso do Tigre e Eufrates tornaram necessária a construção de canais para desviar a água, e de barreiras, o que propiciou o desenvolvimento de técnicas para a construção de plataformas de junco e barro sobre as quais foram construídas as primeiras casas. Além disso, as cidades-estado eram cercadas por muros de argila para afastar as inundações e os inimigos.

Apesar do conhecimento geométrico discutido neste trabalho se restringir ao período da antiga civilização babilônica, considero importante que se tenha algum conhecimento dos períodos anteriores e dos povos que ali viveram.

[1] A palavra Mesopotâmia significa “entre rios”.

- **Os Sumérios [c. 3300-2000 a.C]**

Por volta de 3110 a.C. já haviam surgido na Suméria, parte meridional da Mesopotâmia, dezenas de cidades-estado sendo as mais importantes as de Ur e Lagash. Estas cidades eram estados independentes cada uma governada por um rei. A maioria de seus habitantes era agricultores que durante o dia trabalhavam no campo e à noite voltavam para a cidade. Devido ao seu conhecimento de irrigação, conseguiam fartas colheitas de cereais e de frutos subtropicais. Como a terra estava dividida em grandes propriedades que se achavam nas mãos dos governantes, dos sacerdotes e dos oficiais do exército, o trabalhador rural ou era um rendeiro ou um servo. Assim, excedentes de sua colheita eram guardados nos templos e distribuídos entre as pessoas que não se dedicavam à agricultura. As cidades Sumérias chegaram a ser dominadas por seus grandes conjuntos de templos, que funcionavam como grandes instalações de armazenamento a serviço da comunidade. Nestas cidades, distintas das cidades modernas, não se utilizava dinheiro e os elementos de troca eram o próprio trabalho, comida, roupas e bens.

Os sumérios, em um período bem remoto, produziram pequenas figuras a partir de sinetes cilíndricos, que eram rolados na argila, e a partir deles desenvolveram figuras simplificadas (pictogramas) feitas sobre placas de argila com uma vareta de junco, um grande passo em direção à verdadeira escrita. Esse processo desenvolveu para o chamado cuneiforme, que usava sinais e grupos de sinais para representar sons e sílabas. [Figura 3.2]

Figura 3.2

Durante os séculos seguintes esta escrita foi tornando-se mais complexa e chegou a ser utilizada para diversos fins: escrever códigos legais, crônicas históricas, textos religiosos e literários e enviar cartas. Esta escrita fortaleceu o governo e seus vínculos com as castas sacerdotais que a princípio monopolizavam a instrução.

- **Primeiro Império:**

Após o período sumeriano, devido ao fato da estrutura da cidade-estado não mais atender às exigências da economia que necessitava de uma organização que envolvesse uma zona territorial e os freqüentes combates entre as cidades-estado que ficaram mais complexos com utilização de carros de quatro rodas guiados por asnos, começaram a surgir os grandes impérios.

O primeiro grande império militar – o semítico de Akkad – surgiu com Sargão, rei de Akkad, que em 2334 a. C. já havia conquistado todas as cidades sumérias e estendeu seu poder até a costa do Mediterrâneo. Surge aí o primeiro grande império militar- o semítico de Akkad, que entrou em declínio por volta de 2200 a.C. e foi suplantado por uma revivescência sumeriana liderada pela cidade de Ur.

- **Segundo Império:**

Um novo império foi estabelecido por volta de 2000 a.C. pelos amoreus, que transformaram a Babilônia na capital e, razão pela qual, são comumente chamados de babilônios. Os babilônios estabeleceram um estado autocrático e durante o reinado do seu mais famoso rei, Hamurabi, estenderam seu domínio até a Assíria.

Hamurabi unificou a Mesopotâmia e, embora o império não tivesse uma vida longa, a cidade da Babilônia seria, a partir de então, o centro simbólico dos povos semitas do sul.

O Império Babilônico possuía uma estrutura administrativa elaborada e um código de leis considerado um dos textos jurídicos sobreviventes mais antigo.

Os babilônios tiveram estreito contato com os sumérios, foram influenciados por eles, e com isso, o conhecimento científico dos sumérios foi preservado.

Nesta época a civilização desenvolveu uma política nacional de lealdade e um panteão de deuses. Uma burocracia e um exército profissional passaram a existir e uma classe média de comerciantes e artesãos cresceram entre os grupos de camponeses e funcionários reais.

No final do segundo milênio, a civilização mesopotâmica veio abaixo. Todavia, a Babilônia continuou sendo – durante séculos – um importante centro cultural. Estas circunstâncias permitiram que os conhecimentos científicos alcançados na Mesopotâmia fossem transmitidos aos persas, aos fenícios e por último, aos gregos.

2.3.1. As Fontes

A grande aridez da maior parte da Mesopotâmia, assim como a falta de disponibilidade de qualquer material de escrita natural, levou à criação de um meio de escrita que resistiu ao passar do tempo – as tábulas[2] de argila. Assim, a escrita dos babilônios era feita com o uso de

[2] Em geral os textos de história da matemática usam a palavra “tablete” quando se referem ao material utilizado pelos babilônios para escrever. O fato de um dos livros de história da matemática utilizar a palavra tábula, ao

agulhas sobre estas tábulas. Milhares delas foram encontradas em escavações nos últimos 150 anos e um grande números destas tábulas contém problemas e soluções matemáticas. Henry Rawlinson (1810-1895) foi o primeiro a traduzir a escrita cuneiforme comparando-a com inscrições persas babilônicas do rei Dario I, da Pérsia (séc. VI a.C.) sobre um rochedo em Behistun (no atual Irã) descrevendo uma vitória militar no ano de 1850. A tradição escrita que elas representam morreu sob o domínio grego nos últimos séculos a.C. e permaneceu totalmente desconhecida até o século XI X da era Cristã.

Os primeiros textos matemáticos que possuímos hoje procedem de uma das cidades sumérias, Uruk. Outros provém da época do antigo império babilônico, aproximadamente entre 1800 e 1530 a.C.

Centenas das tábulas que contém problemas matemáticos e soluções foram copiadas, traduzidas e explicadas. Elas são praticamente indestrutíveis, geralmente retangulares mas ocasionalmente redondas. Em geral cabem numa mão, têm cerca de uma polegada de espessura embora algumas sejam tão pequenas quanto um selo postal e outras tão grandes quanto o volume de uma enciclopédia [Figura 3.3].

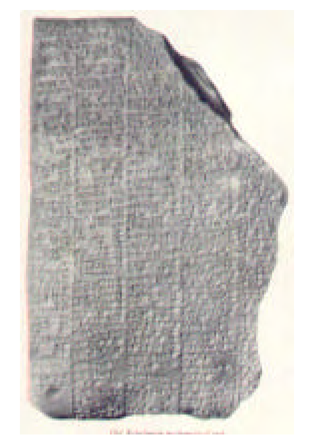


Figura 3.3

A grande maioria das tábulas desenterradas datam da época de Hamurabi, embora uma pequena coleção date de um período mais recente da civilização mesopotâmica, dos séculos em torno de 1000 a.C. e em torno de 300 a.C.

Estas tábulas são a única fonte da matemática mesopotâmica e os conhecimentos geométricos discutidos neste trabalho associados à civilização mesopotâmica referem-se à matemática da Antiga Babilônia.

---

invés de tablete, fez com que eu procurasse o significado das duas palavras nos dicionários. Após esta consulta cheguei a conclusão que o termo tábula era o mais adequado e, decidi utiliza-lo neste trabalho.

Entre as tábulas citadas neste trabalho estão:

- **Tábula Tell Dhibayi**

Uma das 500 tábulas encontradas próxima a Bagdá por arqueólogos em 1962. Muitas estavam relacionadas a transações comerciais e temas administrativos de uma cidade antiga que floresceu na época de Ibalpiel II de Eshuma e datam de cerca de 1750 a.C. Esta tábula em particular difere das demais por apresentar um problema geométrico que pede às dimensões de um retângulo cuja área e diagonal são conhecidas. A discussão deste problema pode ser encontrada no capítulo 7 deste trabalho.

- **A Tábula Plimpton 322**

Esta tábula está alojada na Universidade de Columbia. O nome e o número de registros dados à tábula deve-se ao fato dela pertencer à coleção de G. A. Plimpton. Na época da aquisição, considerou-se tratar de uma tábula do ano de 2250 a.C. encontrada em Senkereh. Considerada como parte de uma tábula maior, foi traduzida inicialmente por George Plimpton por volta de 1923 e seu conteúdo foi interpretado como sendo registros de transações comerciais. Porém, Neugebauer e Sachs deram uma nova interpretação, estabeleceram seu conteúdo como uma tabela matemática da antiga Babilônia de uma época entre 1900-1600 a.C., reconhecendo-a como um documento extremamente importante da história da matemática da Antigüidade e, como o mais antigo documento preservado sobre teoria dos números.

A parte conhecida da tábula Plimpton 322 [Figura 3.4] tem a forma de um retângulo de aproximadamente 13 cm de largura, 9 cm de altura e espessura de 3 cm.

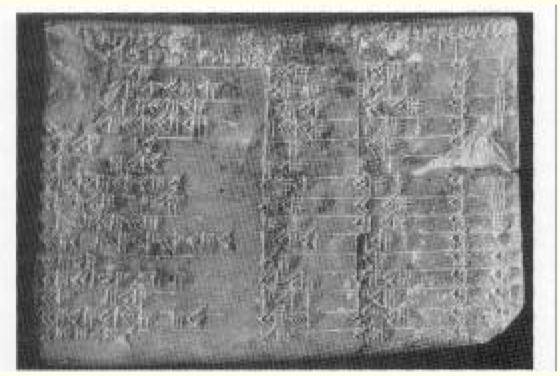


Figura 3.4

- **A tábula Susa**

Descoberta na atual cidade de Shush, na região Khuzistan do Irã. A cidade está aproximadamente a 350 km da antiga cidade da Babilônia. W. K. Loftus identificou o local como um importante sítio arqueológico por volta de 1850, mas as escavações só foram realizadas muito tempo depois. A tábula contém informações sobre como calcular o raio de um círculo circunscrito a um triângulo isósceles.

Além do conteúdo destas tábulas também são discutidos neste trabalho conteúdos encontrados nas tábulas BM 85194, BM 96454, YBC 7289 e YBC 7302 , na tábula Smith e na Yale YBC 7289.

2.3.2. A geometria

Uma grande porcentagem de textos matemáticos da Mesopotâmia encontrada nas tábulas estão relacionados a questões hidráulicas como a construção de canais e diques, a medição de campos, etc. Isto é razoável devido ao fato da Mesopotâmia possuir um amplo sistema de irrigação artificial. Além disso, é possível identificar no conhecimento matemático deste povo o alto nível das técnicas de cálculo provavelmente desenvolvidas para servirem de apoio a ampla atividade comercial.

Com relação ao conhecimento geométrico este revela sua origem prática: juntamente com o cálculo de áreas de campos aparecem cálculos dos rendimentos totais dos terrenos, dependentes de um rendimento específico, que é função da qualidade do solo. No cálculo de taludes com perfil trapezoidal está também calculado o número de trabalhadores necessários por jornada média de trabalho. Aparecem também cálculos relativos à construção de tabiques com forma de anel, de alicerces de templos, poços e canais. Existe evidência de que os babilônios estavam familiarizados com regras para calcular áreas de retângulos, triângulos retângulos, triângulos isósceles e trapézios com um lado perpendicular às bases.

Um outro fato importante é que os documentos encontrados e analisados mostram, de acordo com alguns estudiosos, que a matemática babilônica não estava simplesmente focalizada em aplicações, mas indica um começo de interesse teórico e um destes exemplos é a tábula Plimpton 322.

De fato, na geometria babilônica, por exemplo, nenhum teorema nem prova explícitos são encontrados. Apesar dos problemas geométricos envolverem cálculos numéricos é possível perceber, além do interesse teórico, sinais do uso de inter-relações entre o que é identificado hoje como álgebra e geometria. Alguns pesquisadores colocam também a possibilidade dos problemas geométricos encontrados nos textos terem sido utilizados como um meio de oferecer exemplos para a aplicação de um determinado tipo de problema algébrico, já que os maiores sucessos da geometria babilônica se deram em duas áreas nas quais eles puderam demonstrar suas habilidades algébricas:

- O teorema de Pitágoras
- A semelhança de triângulos.

Estes trabalhos se anteciparam aos trabalhos gregos em mais de 1000 anos.

2.4. O Egito

O Egito está situado no nordeste da África, entre os desertos do Saara e da Núbia. É cortado pelo rio Nilo no sentido sul-norte, formando duas regiões distintas: o vale, estreita faixa de terra cultivável, apertada entre desertos, denominada Alto Egito e o delta, em forma de leque, com maior extensão de terras aráveis, pastos e pântanos, denominada Baixo Egito.[Figura 4.1]

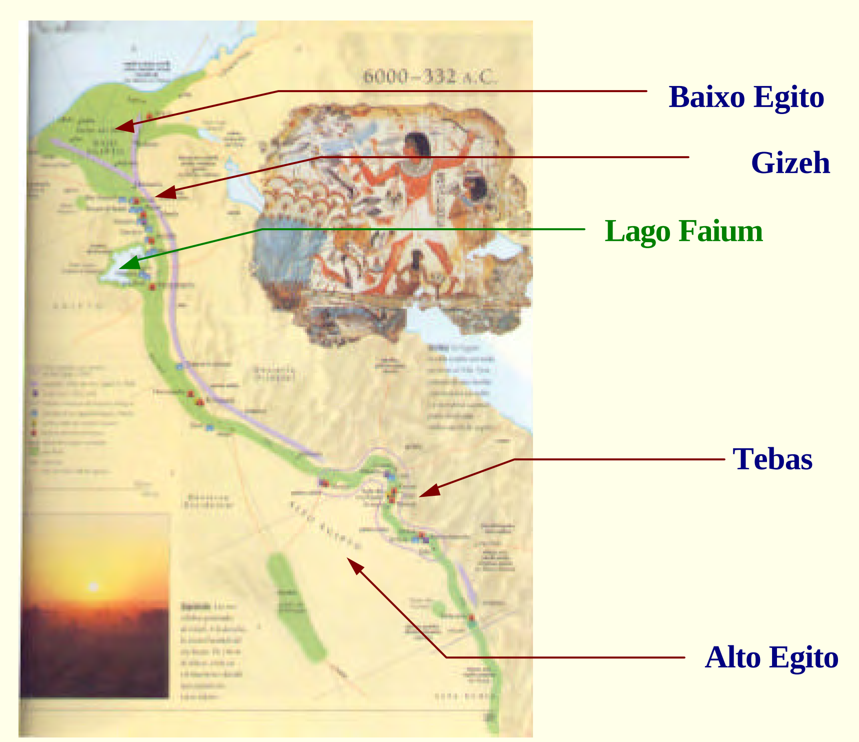


Figura 4.1

Como as enchentes do Nilo, ao contrário do que ocorria com o Tigre e o Eufrates, eram regulares e previsíveis, os egípcios não precisavam de trabalhos de recuperação de terras. Além disso, a proteção natural dos desertos e das montanhas mantinha este povo em isolamento, livre de invasões estrangeiras e vivendo pacificamente.

A agricultura surgiu no vale do Nilo a partir de 6000 a.C. e por volta de 4000 a.C. os primeiros egípcios se fixaram às margens do Nilo, iniciaram o cultivo de plantas (trigo, cevada, linho) e a domesticação de animais (bois, porcos e carneiros).

Por volta de 3100 a.C. o Egito foi unificado dando início ao chamado Antigo Império cuja capital Mênfis estava estrategicamente situada entre o Alto e o Baixo Egito. Durante este período seis dinastias governaram o país, cada uma delas encabeçada por uma linhagem de faraós que eram venerados como um deus e considerados um intermediário entre os deuses e os mortais. Este papel nutriu o desenvolvimento da monumental arquitetura egípcia incluindo as pirâmides, a construção de sepulturas reais e de grandes templos como os de Luxor e Karnak .

O poder absoluto dos faraós atingiu o auge durante a IV dinastia cujos faraós Quéops, Quefren e Miquerinos mandaram construir enormes pirâmides na planícies de Gizeh, perto de Mênfis.

Com o término do Antigo Império, por volta de 2000 a.C., seguiu-se uma fase intermediária na qual três dinastias governaram o Egito. Após esta fase, foi instaurado o Médio Império, com capital em Tebas, que durou de 2000 a.C. a 1700 a.C., aproximadamente. Considerado um período de maior responsabilidade social. Durante a XII dinastia, além do grande desenvolvimento intelectual realizou obras públicas que beneficiaram toda população, como por exemplo, a construção de uma grande represa para armazenamento das águas, conhecida como lago Méris ou Faium.

O período intermediário que se seguiu foi marcado por uma rebelião de camponeses e escravos e pela ocupação do delta pelos hicsos, povo de origem asiática, iniciando um período que durou cerca de um século e meio.

O Novo Império teve início com a expulsão dos hicsos por volta de 1580 a.C. e durou até aproximadamente 1087 a.C.. Neste período o país foi governado por três dinastias de faraós e a política dominante não era mais pacífica. Foi um período de grande expansão territorial que chegou até o rio Eufrates, na Síria.

O Novo Império começa a se desmoronar a partir de uma decadência social com sinais de desorganização interna e da invasão de bárbaros, e se acelerou com o poder crescente dos sacerdotes. Ao mesmo tempo, os próprios egípcios pareciam ter perdido a criatividade. Em 670 a.C. o Egito é conquistado pelos assírios, em 662 a.C. readquirem sua independência que leva ao renascimento cultural, mas em 525 é conquistado pelos persas e em 332 cai nas mãos do exército de Alexandre Magno e a antiga civilização egípcia não mais se recupera.

2.4.1. A Escrita egípcia e os escribas

Os egípcios desenvolveram sua primeira forma de escrita no período pré-dinástico. Este sistema conhecido como hieroglífico compunha-se, do mesmo modo da escrita babilônica em seu começo, de sinais pictográficos para representar objetos. Esse sistema foi evoluindo e no início do Antigo Império compreendia três tipos de caracteres: pictográfico, silábico e alfabético.

Esta escrita foi gradualmente desenvolvida pelos escribas[3] com a qual marcavam as sepulturas e templos. Eles se encarregavam de arrecadar os impostos, dirigiam gigantescos exércitos de trabalhadores e desempenhavam trabalhos judiciais. Os escribas utilizavam a matemática para resolver questões relativas à medição de terras, especialmente depois das contínuas e periódicas inundações do Nilo, ao cálculo de impostos e contribuições, ao cálculo da capacidade dos depósitos de provisões, à projeção de obras arquitetônicas, etc. Estes assuntos aparecem nos principais papiros matemáticos encontrados.

Além da escrita hieroglífica – considerada sagrada - eles também usavam uma outra escrita chamada de demótica.

Jean Champollion foi o principal responsável pela primeira tradução da escrita hieroglífica no começo do século IX. Seu trabalho foi realizado através da ajuda de uma inscrição multilíngüe – a pedra Roseta – em hieróglifos e grego bem como a escrita demótica, uma forma de escrita hierática do papiro. Na figura 4.2 aparecem números e frações escritos tanto na escrita hierática como na hieroglífica.

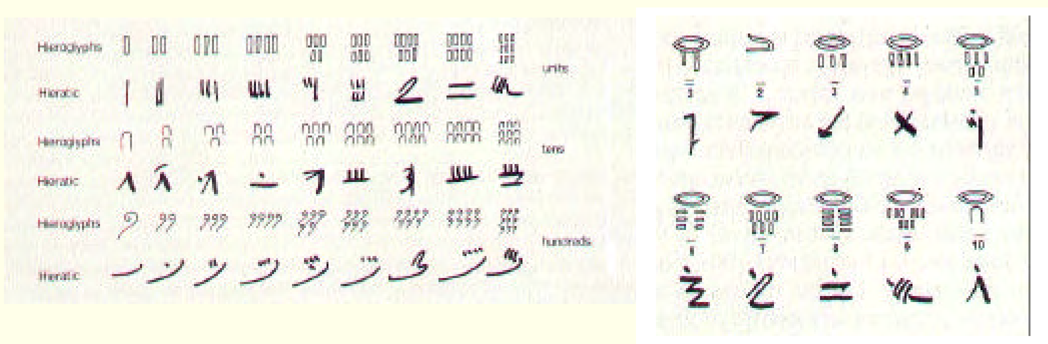


Figura 4.2

2.4.2. As Fontes

O conhecimento que temos hoje da matemática egípcia provém de cinco papiros, dos quais os mais importantes são: o Papiro Matemático Rhind e o Papiro Matemático Moscou.. Estes

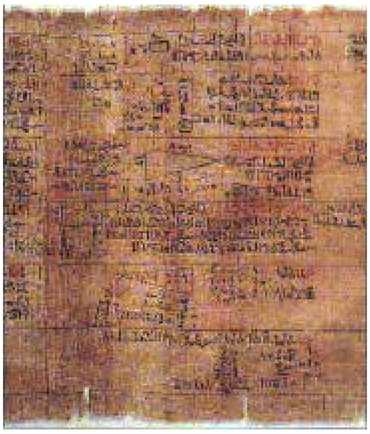
---

[3] Profissionais da administração do estado pertencentes à sociedade dominante e exploradora.

dois documentos datam provavelmente do século XVIII a.C. mas seu conteúdo trata de documentos ainda mais antigos. Além destes papiros, existem outros como documentos jurídicos, por exemplo, que possuem informações sobre a posição social da matemática.

- **O Papiro Matemático Rhind ou Papiro Ahmes**

O papiro Rhind foi descoberto por volta de 1850, provavelmente nas ruínas de uma pequena construção próxima ao templo mortuário de Ramssés II em Tebas. Foi trazido para Luxor junto com outras antigüidades egípcias por Alexander Henry Rhind. Após a morte de Rhind o papiro foi comprado pelo Museu Britânico em 1865. Hoje ele é formado por um rolo contendo 14 folhas de papiros, com cerca de 40 cm de largura e 23 cm de altura, coladas em um de seus lados perfazendo 513 cm de comprimento, mas parece que o rolo original continha 20 folhas. [Figura 4.3]

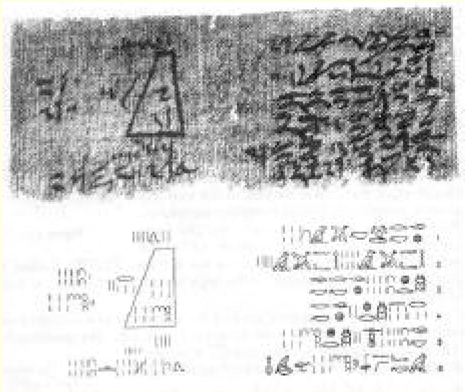


Parte do Papiro Rhind
Figura 4.3

Também é conhecido como papiro Ahmose ou papiro Ahmes em razão de ter sido copiado por volta de 1650 a.C. pelo escriba Ahmose segundo o qual é uma cópia de trabalhos mais antigos. Provavelmente, trata-se de um registro dos conhecimentos de Imhotep, o lendário físico e arquiteto da época do faraó Djozer da 3ª. Dinastia. Ele contém 87 problemas e suas soluções e é considerado a fonte da matemática egípcia mais compreensiva.

- **O papiro Moscou**

Considerado o segundo papiro matemático mais importante, data do Médio Império e é um pouco mais antigo que o papiro Rhind. Foi comprado em 1893 por V. S. Golenishchev (- 1947). Um fragmento dele encontra-se bem preservado no Museu de Belas Artes em Moscou formado por folhas de 8 cm de comprimento por um quarto de altura. [Figura 4.4]



Parte do Papiro Moscou
Figura 4.4

Escrito cerca de 1850 a. C. por um escriba desconhecido, este papiro contém 25 problemas e nele estão dois resultados notáveis da matemática egípcia: um método para calcular o volume do tronco de pirâmide e a solução para um problema que alguns acreditam tratar-se da área de um hemisfério.

O domínio grego sobre o Egito em séculos próximos ao início da era cristã foi responsável pelo desaparecimento da nativa escrita hierática egípcia. No entanto, informações sobre o conhecimento matemático e, sobre a cultura dos antigos egípcios foram resgatados através destes dois papiros e de centenas de outros preservados devido ao clima seco da região.

2.4.3. A Geometria

De acordo com Herôdotos[4] os egípcios foram os primeiros entre todos os homens a descobrirem o ciclo do ano e a dividir em doze períodos o curso das estações. Atribuíram trinta dias a cada um dos doze meses e acrescentaram cinco dias a cada ano de modo a fazerem coincidir o ciclo completo das estações com o calendário.

Durante o reinado de Sesôstris, foram construídos canais que cortaram o Egito em todos os sentidos. Além disso,

> Esse rei dividiu o território do Egito entre todos os egípcios, dando a cada um deles um lote quadrado igual de terra e impondo-lhe o pagamento de um tributo anual. Qualquer homem despojado pelo rio de uma parte de sua terra poderia ir a Sesôstris e expor-lhe a ocorrência; então o rei mandava homens seus observar e medir a extensão do decréscimo da terra para conceder ao detentor do lote uma redução do tributo proporcional a perda. Essa me parece a origem da geometria, mas tarde levada até Hélade…

[4] Herôdotos p. 90

Na geometria egípcia encontramos problemas de medidas sobre volumes e áreas das figuras planas e dos sólidos mais familiares que, na sua maioria, foram trabalhados pelos egípcios. Eles calculavam áreas de retângulos, triângulos e trapézios isósceles, provavelmente pelo método de decomposição e recomposição de figuras, análogo ao da geometria chinesa, como veremos; obtiveram valores aproximados para π, possuíam métodos para calcular o volume da pirâmide, do cilindro e talvez a área de um hemisfério.

A geometria egípcia estendeu-se no "projeto" de suas obras de arquitetura.

As Grandes Pirâmides, construídas por volta de 3000 a.C., tinham faces orientadas para os pontos cardeais. Acredita-se que estes pontos serviriam para orientar a longa obra de edificação das pirâmides, oferecendo marcos direcionais duradouros.

Além da construção das pirâmides, os egípcios construíam barcos, barragens e canais. Durante o reinado de Sesóstres foram construídos tantos canais que o Egito ficou privado do uso de carros e cavalos como meios de transporte.

Na época de Quéops foi construída uma estrada de pedra polida sobre as quais foram gravadas figuras. A construção da estrada e dos compartimentos subterrâneos na colina onde fica a pirâmide de Quéops duraram cerca de 10 anos. Na construção da pirâmide foram gastos 20 anos. Sua base é quadrada e sua altura é igual ao comprimento dos lados. Toda ela foi feita com blocos de pedra polida, cujo comprimento não é inferior a 30 pés.

Também encontramos nas construções de estátuas colossais, dos pórticos, templos, oráculos, muralhas e lagos a manifestação do conhecimento geométrico dos egípcios.

Uma outra obra arquitetônica é o Labirinto contendo 12 átrios cobertos, 3000 conjuntos de aposentos com dois pavimentos, sendo 1500 acima do solo e 1500 subterrâneos. Os subterrâneos são criptas funerárias dos reis que mandaram construir o Labirinto.

2.5. Civilização Chinesa

2.5.1. A China

A agricultura no vale do rio Amarelo começou por volta de 5000 a.C. e em 3000 a.C. já existia nesta região culturas complexas que, além das atividades agrícolas, usavam o jade e a madeira na gravura, tinham criações do bicho-da-seda e fabricavam vasos cerimoniais em cerâmica. A base da alimentação destes grupos era o painço, grão que se adaptava bem aos terrenos às vezes áridos do norte.

A atividade agrícola que esteve por muito tempo concentrada no norte da China possibilitou, por volta de 3000 a.C. o avanço cultural da região, o surgimento das primeiras cidades e fortificações e o início da escrita pictográfica precedente da escrita chinesa atual. Segundo as lendas, a China foi fundada pelo imperador Huang Di no ano de 2689 a.C. porém, há evidências da existência de uma sociedade anterior no local, a Dinastia Shang [Figura 5.1.]

Figura 5.1

- **A Dinastia Shang [c. 1700 a.C. – 1122 a.C.]**

Os reis Shang acreditavam que podiam falar com seus antepassados escrevendo perguntas em ossos especiais e não tomavam decisões importantes sem a aprovação de seus antepassados. Estes governantes eram muito poderosos e quando um rei morria era enterrado em túmulos luxuosos com seus escravos e soldados.

No governo Shang foram construídas fortificações e cidades, e ocorreu a unificação da moeda. Neste período, pode ter se iniciado o desenvolvimento de uma matemática básica. A corte Shang possuía escribas e arquivistas, e era uma monarquia culta produzindo provavelmente a primeira cultura letrada a leste da Mesopotâmia.

A língua Shang possuía cerca de cinco mil caracteres e sua estrutura é bem semelhante a do chinês moderno. A escrita foi importante como força restauradora e estabilizadora que permitiu unir um país enorme e diversificado na medida em que o chinês escrito tornou-se a língua do governo e da cultura que ultrapassava as divisões de dialeto, religião e região.

- **A Dinastia Zhou [c. 1027a.C. – c. 256 a.C.]**

A dinastia Shang foi substituída, por volta do começo do primeiro milênio antes de Cristo pela dinastia Zhou – uma tribo do oeste do vale – que se dissolveu devido a numerosas guerras com estados feudais. Esta dinastia foi a mais duradoura da Antiga China.

Sob o domínio Zhou, muitas das estruturas governamentais e sociais já existentes no período Shang foram preservadas e aperfeiçoadas. Os rituais fúnebres, a técnica de trabalhar o bronze e as artes decorativas permaneceram praticamente inalteradas.

No século VI a.C. ocorreu um grande florescimento intelectual, no qual o mais famoso dos filósofos foi Confúcio. Academias de estudiosos foram encontradas em vários estados. Estudiosos individuais eram contratados por outros senhores feudais como seus conselheiros na época do crescimento tecnológico provocado pela entrada do ferro, provavelmente em uso por volta de 500 a.C. na fabricação de utensílios e, posteriormente, de armas.

O período feudal terminou com a absorção dos estados mais fracos pelos mais fortes, até que a China foi unificada na época do imperador Ch'in Shi Huangdi em 221 a.C. de quem o país herdou seu nome. Sob sua liderança a China foi transformada no mais alto estado burocrático centralizado. Ele adotou um código legal severo, proibiu os costumes locais, unificou a moeda, exigiu a padronização dos pesos, medidas e da escrita. Lendas sustentam que este imperador ordenou a queima de todos os livros do período anterior para acabar com a divergência de opiniões e interesses, mas existe alguma razão para duvidar da aplicação deste decreto.

Para defender-se dos invasores nômades Ch'in Shi Huangdi construiu uma muralha contínua, de terra batida, de mais de 1600 km de comprimento – a Grande Muralha da China que foi terminada durante a Dinastia Qin.

O período Zhou chegou ao fim pouco depois da morte do imperador Ch'in Shi Huangdi a partir de uma rebelião e que causou o massacre de toda família imperial.

- **A Dinastia Han [203 a.C. – 220 d.C.]**

A Dinastia Han surge com a derrota da Dinastia Qin, durante a qual a China viveu um período de intensa guerra civil. que durou cerca de 400 anos. Logo no começo da Dinastia Han os impostos foram reduzidos, terras foram entregues aos camponeses e foi aprovada uma série de medidas para favorecer a prosperidade. Neste período a China expandiu seu Império e desenvolveu o comércio da seda com a Europa.

Além disso, o estabelecimento de um governo centralizado e de uma administração pública para lidar com uma população de aproximadamente seis milhões de pessoas exigia, o pagamento de impostos feitos com dinheiro ou através da prestação de serviço obrigatório - cada cidadão era obrigado a trabalhar para o governo cerca de um mês por ano em rodovias, canais, palácios, etc. ou algumas vezes prestar serviço militar – e, necessitava de um sistema educacional.

Com o crescimento da capacidade produtiva houve um rápido desenvolvimento em várias áreas da ciência e tecnologia provocando o desenvolvimento da matemática. Por exemplo, a produção agrícola exigia previsões mais precisas das estações e isto levou à construção de calendários e ao estudo da astronomia.

2.5.2. O conhecimento matemático e as fontes

Existem algumas informações sobre o conhecimento matemático na segunda metade do segundo milênio a.C e estes estão relacionados com calendários altamente desenvolvidos. É da sociedade que vivia lá, a Dinastia Shang, que o "oráculo dos ossos" pertence, curioso pedaço de osso inscrito com uma escrita muito antiga que foi usada para adivinhação pelos sacerdotes do período. Os ossos são as fontes do conhecimento do mais antigo sistema de numeração chinês.

Na dinastia Han completou-se o estabelecimento de uma administração pública treinada para o qual um sistema educacional era necessário. Entre os textos usados para a educação e treinamento de civis durante esta dinastia estão dois trabalhos matemáticos, provavelmente compostos antes da dinastia Han, o *Zhoubi suanjing* e o *Jiuzhang suanshu*. É impossível datar exatamente as primeiras descobertas matemáticas contidas nestes textos, mas existem registros fragmentados de fontes mais antigas análogas ao *Jiuzhang suanshu*, o que leva a considerar a possibilidade de que algum material contido no *Jiuzhang suanshu* seja do período *Zhou*.

- **O *Zhoubi suanjing* [A Aritmética Clássica do Gnomon e os Caminhos Circulares do Paraíso]**

Também conhecido na literatura como *Chou-pei*, *Chou-pi* e Chou-*pei Suan King*, o *Zhoubi suanjing*, é o mais antigo trabalho escrito chinês sobre a matemática que sobreviveu até nossos dias e é também um livro de astronomia. [Figura 5.2]

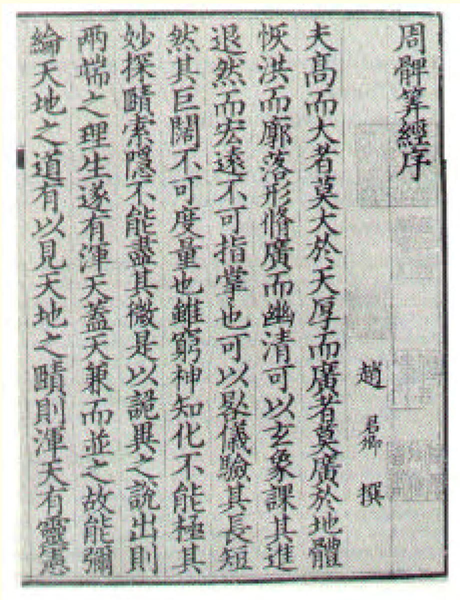

周髀筭經序
趙君卿撰
夫高而大者莫大於天厚而廣者莫廣於地體
恢洪而廓落形脩廣而幽清可以玄象課其進
退然而宏遠不可指掌也可以晷儀驗其長短
然其巨闊不可度量也雖窮神知化不能極其
妙探賾索隱不能盡其微是以詭異之說出則
兩端之理生遂有渾天蓋天兼而並之故能彌
綸天地之道有以見天地之賾則渾天有靈憲

Figura 5.2

A mais antiga edição do *Zhoubi suanjing* é posterior a 1213 d. C. e está agora guardada na biblioteca Shanghai. Existe também, uma edição publicada por Zhai Kaimei do final da dinastia Ming [1366-1644 d.C.] e a edição de Dai Zhen do começo da dinastia Qing [1644-1911 d.C.]. As edições atuais são baseadas nessas três.

A edição do *Zhoubi Suanjing* que sobreviveu foi comentada por muitos matemáticos dos períodos Han e Tong; data aproximadamente do primeiro século antes de Cristo. O autor é desconhecido e é uma fonte para o entendimento da antiga matemática e astronomia chinesas.

Embora não se saiba exatamente a que época pertença, é possível dizer que ele é o resultado do acúmulo gradual dos conhecimentos científicos necessários a astronomia desenvolvida entre os períodos Zhou e Han e, que o texto passou por uma mudança significativa desde que foi escrito pela primeira vez.

Apesar do *Zhoubi suajing* conter conhecimentos matemáticos bastante avançados, seu principal objetivo era apresentar o conhecimento adquirido no estudo da astronomia e, sendo assim, não é um trabalho especificamente matemático. Ele é, na realidade, um livro completo sobre cosmologia, com deduções dependentes mais dos cálculos do que do misticismo, embora, em alguns diálogos, perceba-se uma mistura de misticismo, astronomia e mensuração. Seu conteúdo está relacionado com calendários e com problemas de cálculos com sombras. Os autores já usavam um tipo de numeração decimal e conheciam como somar, subtrair, multiplicar e dividir frações e como extrair a raiz quadrada de qualquer número. Eles também conheciam o Teorema de Pitágoras para os triângulos (3, 4, 5) e (6, 8, 10); usavam o valor 3 para a razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo e sabiam como trabalhar com semelhança de triângulos retângulos.

- **O Jiuzhang suanshu (Os Nove Capítulos da Arte Matemática)**

O mais antigo trabalho escrito específico de matemática na China que sobrevive até hoje é o *Jiuzhang suanshu*. Este trabalho também é conhecido na literatura pelos nomes *Chiu-chang suan shu*, *K'iu-ch'ang Suan Shu* e é considerado o trabalho representativo do desenvolvimento da antiga matemática chinesa das dinastias Zhou e Qin até a dinastia Han; foi uma influência extremamente importante nos desenvolvimentos posteriores da matemática chinesa e, de acordo com alguns estudiosos, foi, de fato, a base deste desenvolvimento. Ele é considerado um clássico da matemática da antiga China.

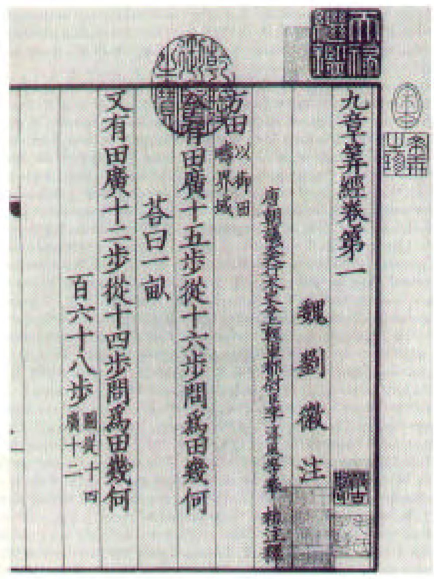

九章筭經卷第一
魏劉徽注
方田 以御田疇界域
有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步 圖從十四廣十二

Figura 5.3

O *Jiuzhang suanshu* foi composto na forma de perguntas e respostas; contém 246 problemas divididos em nove capítulos e possui uma estrutura didática que basicamente envolve a apresentação de um ou mais problemas que são resolvidos usando algum método particular cuja abordagem é essencialmente indutiva. Em outros momentos, os problemas são usados como exemplos após o entendimento de um determinado assunto, e, em um terceiro momento, o método de solução é utilizado para resolver problemas práticos.

Esta forma "problema ↔ solução" exerceu uma forte influência nos trabalho matemáticos chineses posteriores.

O *Jiuzhang suanshu* tornou-se, na tradição chinesa, referência obrigatória, o clássico dos clássicos e provavelmente fosse destinado aos contadores da administração Han.

Do terceiro ao sexto século a matemática chinesa entrou em sua fase teórica. Pela primeira vez, parece, foi dada importância a provas e passaram a registrá-las por escrito. No final do terceiro século Liu Hui obteve valores mais precisos para π e, o volume da esfera usando o princípio de Cavalieri e o volume da pirâmide foi calculado usando quantidades infinitamente pequenas. Tudo isto é encontrado nos diversos comentários do *Jiuzhang suanshu*.

Durante as dinastias Sui (518-617) e Tang (618-907) a matemática passou a ser ensinada oficialmente, baseada em um conjunto de livros antigos e contemporâneos. Estes livros incluíam o *Zhoubi suanjing* e o *Jiuzhang suanshu*.

Os conteúdos do *Jiuzhang suanshu* estão diretamente relacionados com problemas da vida real e refletem a sabedoria e habilidades das pessoas da antiga China. Estes conteúdos estão distribuídos em nove capítulos e cada capítulo é associado a um nome que, de alguma forma indica o tema ou temas tratados.

Capítulo 1: *Fang-tian* (medida de campos): O tema central é o cálculo de áreas de terras cultivadas. Está relacionado à agrimensura e possui regras corretas para calcular a área do triângulo, do trapézio e do círculo ($\frac{1}{2}C \cdot \frac{1}{2}d$ e $\frac{1}{4}Cd$), como também, aproximações para a área do círculo ($\frac{3}{4}d^2$ e $\frac{1}{12}C^2$), onde π é tomado como 3. Além disso, este capítulo contém uma discussão detalhada de cálculos com frações.

Capítulo 2: *Su-mi* (cereais): Discute vários problemas relativos à porcentagens e proporções. Em particular, trata de proporções relacionadas a trocas de cereais.

Capítulo 3: *Shuai-fen ou Cui fên* (Distribuição por proporção): Discute problemas sobre distribuições proporcionais. Relacionado à regras de sociedade e regra de três.

Capítulo 4: *Shao-guang* (calculando comprimentos) relacionado a encontrar lados de figuras incluindo raízes quadradas e cúbicas. *Shao guang* significa, dada a área ou volume, achar o comprimento de um lado. Neste capítulo, os métodos para calcular raízes quadradas e cúbicas são explicados.

Capítulo 5: *Shang gong* (Consultando construções) Trata de vários tipos de cálculos para construções. É principalmente sobre o cálculo de volumes de vários sólidos.

Capítulo 6: *Jun shu*, ou *Kin-shu* (taxas justas) é sobre como distribuir cereais e a prestação de serviço obrigatório do melhor modo de acordo com o tamanho da população e as distâncias entre os lugares.

Capítulo 7: *Ying-pu-tsu*, ou *Ying-nu ou Ying bu zu* (excesso e falta) Sobre o uso do método da falsa posição para resolver alguns problemas

Capítulo 8: *Fang ch'eng* (Equação): Sobre equações. Discute problemas de equações lineares simultâneas, com alguma idéia de determinantes, o conceito de números positivos e negativos e métodos de adição e subtração de números positivos e negativos.

Capítulo 9: *Gou-gu* (triângulo retângulo): discute o Teorema *Gougu* ou Teorema de Pitágoras e problemas sobre semelhança de triângulos retângulos.

2.6. A Índia

2.6.1. A Civilização Harappa

Por volta do quarto milênio a.C. se formou pela primeira vez no território indiano uma sociedade de classes, localizada exatamente no vale do Indo e situada a noroeste. A agricultura nesta região foi favorecida e o vale deu lugar ao nascimento de uma das primeiras civilizações, a antiga Índia há aproximadamente 2500 a.C. É desta civilização a prova mais antiga de cerâmica feita em uma roda. A evidências do surgimento de uma civilização na Índia, por volta de 2500 a.C. foram fornecidas pela descoberta das ruínas de duas cidades da região: Mohenjo-Daro e Harappa, cidades-estado mais importantes deste período.

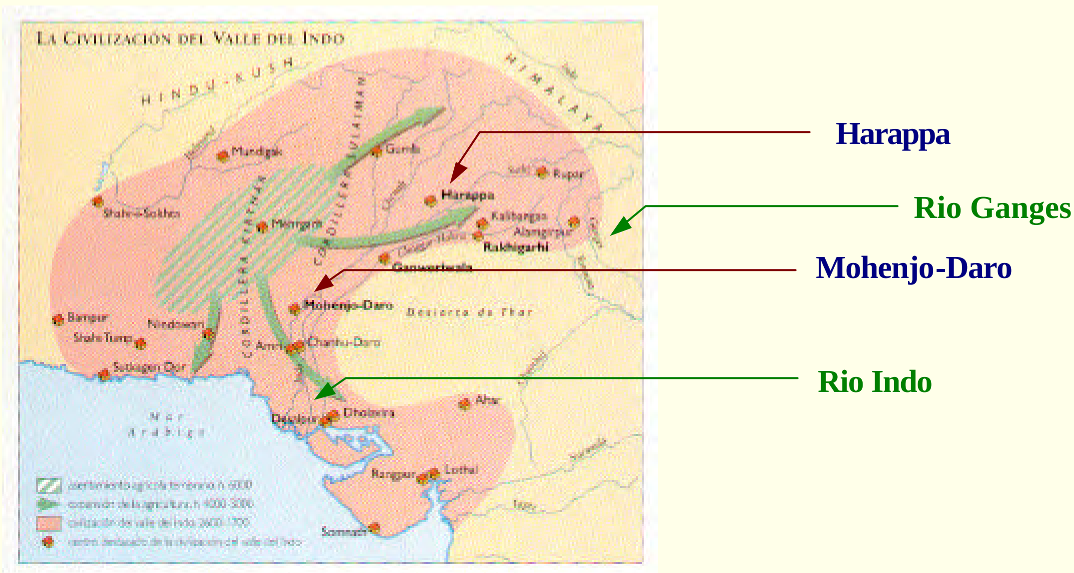


Figura 6.1

Uma das invenções desta civilização pode ter sido a fabricação de tijolos cozidos, material que utilizavam na construção das cidades e que também podia ser utilizado na construção de represas, galerias e canais.

Esta civilização era bastante culta, sua escrita pictográfica pode ser encontrada em vários selos provavelmente usados na marcação de fardos de mercadorias e em fragmentos de cerâmica. Além disso, é possível que tenha havido a padronização de pesos e medidas e a construção de grandes celeiros públicos.

Não se sabe quais motivos provocaram o desaparecimento da civilização Harappa por volta de 1750 a.C. Alguns estudiosos consideram a possibilidade de lá ter ocorrido o primeiro desastre ambiental causado pelo desmatamento descontrolado, feito pelo homem, para a utilização da madeira na alimentação de fornos para o fabrico dos tijolos.

2.6.2. Os arianos

Na mesma época do desaparecimento da civilização Harappa surgem, vindos dos estepes asiáticos, povos indo-europeus, que se instalaram ao longo do vale do Ganges. Os arianos não possuíam uma cultura tão avançada quanto à cultura Harappa, e eram pastores.

A escrita desaparece nesta região e só reaparece em meados do primeiro milênio a.C. quando as cidades-estado foram reconstruídas, as pessoas deixaram seus hábitos pastoris e passaram a dedicar-se ao cultivo do arroz, povoando grande região sobre o vale do Ganges.

A cultura ariana deste período estabeleceu as bases da religião hindu que era centrada na realização de sacrifícios. *Agni*, o deus do fogo, era muito importante e os brâmanes, sacerdotes que presidiam as cerimônias, tinham posição de destaque.

Este povo fazia sacrifícios para seus deuses para obter bastante comida, boa fortuna, boa saúde, longa vida e vários outros benefícios materiais. Para agradar os deuses tudo tinha que ser feito de forma precisa . A exatidão matemática era vista como de extrema importância.

As informações que temos sobre os deuses desta cultura vêm dos Vedas, textos sagrados, usados nos rituais de sacrifício que contêm recitações e cânticos executados durante os sacrifícios e explicações de como utilizá-los nestas cerimônias além de informações sobre a origem e importância dos rituais. Acumulada durante séculos esta coleção de mais de mil hinos foi transmitida inicialmente pela tradição oral, reunida e registrada por escrito pela primeira vez por volta de 1000 a.C. e em alguma data depois de 1300 a.C., respectivamente.

Por volta do séc. VIII a.C. estados monarcas foram estabelecidos na área, e por volta do séc. VII a.C., cerca de 16 reinos se espalhavam pelo vale do Ganges. Esta região tornou-se o maior centro da população indiana, talvez devido ao cultivo do arroz.

2.6.3. O Conhecimento matemático e as fontes

A história da geometria na Índia pode ser dividida em três períodos distintos:

- **O pré-ariano**

O modo como as cidades deste período eram planejadas e as cerâmicas encontradas nas ruínas de Mohenjo-Daro com motivos de decoração que contém uma série de círculos que se interceptam, quadrados, triângulos unidos pelo vértice, retângulos com os quatro lados encurvados, etc., são evidências do conhecimento geométrico deste povo.

- **O período Védico**

O motivo mais comum de porcelana do período anterior, os retângulos com lados encurvados, está preservado no mais importante altar de sacrifício védico, o *Mahavedi*, que tem esta forma. Isto pode indicar alguma relação às civilizações dos dois períodos.

A geometria do período védico se manifesta na construção dos diversos altares de sacrifício e se desenvolveu para atender às necessidades religiosas. As regras ditadas pelos videntes védicos para a construção do *vedi* (altar de sacrifício) e do *agni* (local do fogo sagrado) foram registradas nos *Sulbasutras*. Tudo o que se conhece como matemática Védica está contido nos *Sulbasutras* e não sabemos se este povo empreendeu investigações matemáticas por sua própria causa ou se eles só estudaram matemática para resolverem os problemas necessários a seus rituais religiosos. Alguns historiadores têm argumentado que a matemática, em particular a geometria, deve também ter existido para apoiar os trabalhos astronômicos do mesmo período.

Assim, as primeiras fontes escritas da geometria da antiga Índia são da época em que apareceram os livros filosófico-religiosos, os Vedas e são encontradas nos *Sulbasutras* - manuais para construção de altares. A palavra *Sulbasutra* deriva das palavras *sulba-sutra* que significam “regras de corda”. Os *Sulbasutras*, apêndices dos Vedas, continham instruções de caráter religioso para a construção de altares, utilizando cordas e palitos de bambu.

É interessante observar que apesar do conhecimento geométrico encontrado nos *Sulbasutras* estar relacionado às exigências teóricas para construção de altares de tijolos, a tecnologia de construção de tijolos cozidos pertencia à cultura Harappa. Há, portanto, a possibilidade de que o conhecimento geométrico contido nos *Sulbasutras* já existisse no período Harappa e também pode ser uma evidência da possibilidade de haver alguma relação entre estas duas civilizações. De qualquer modo são os *Sulbasutras* as fontes do conhecimento geométrico da Antiga Índia.

- **Os *Sulbasutras***

Os *Sulbasutras* contêm regras para a construção dos altares que tinham que ter medidas precisas para que o sacrifício fosse bem sucedido. Eles mostram que o conhecimento matemático dos sacerdotes indianos não era pequeno, e que conheciam o Teorema de Pitágoras.

É desconhecida a época em que os *Sulbasutras* foram escritos, mas alguns estudiosos os colocam aproximadamente em um período entre 800 a.C. e 500 a.C. No entanto, alguns assuntos neles tratados remontam provavelmente ao século XV a.C.

Os autores dos *Sulbasutras* eram os *sulbakaras* e pouco se sabe sobre eles exceto que não foram apenas escribas, mas, provavelmente, também sacerdotes-artesãos que realizavam múltiplas tarefas, entre elas a construção do *vedi* (altar para sacrifício), a manutenção do *agni* (fogo sagrado) e a instrução dos fiéis sobre a escolha adequada tanto dos sacrifícios como dos altares.

Apesar desta coleção de textos sagrados já ser conhecida antes de 1930, ela não é mencionada nem por Neugebauer em seu livro *Vorlesungen Über Geschichte de Antiken Mathematischen Wissenschaften* nem por B. L. van der Waerden em seu livro *Science Awakening*.

As construções encontradas nos *Sulbasutras* eram para desenhar figuras de uma área dada, bem como figuras de área igual a de outras. As áreas eram bem grandes, como por exemplo, se a altura de uma pessoa era a unidade, a área dos altares era de cerca de 7,5 unidades quadradas (cerca de 25 m^2).

A geometria dos *Sulbasutras* é principalmente construtiva, embora, ocasionalmente, fosse observado e formulado algum resultado geométrica envolvido. As figuras geométricas, usadas para formar os altares, incluíam: triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, círculos, semi-círculos, retângulos com um semi-círculo sobre um lado, e assim por diante, que deveriam ajustar-se a dimensões ou áreas específicas. A orientação, formas e áreas dos altares tinham que ser rigorosamente exatas, e esta exatidão era tão importante quanto a pronúncia correta dos cânticos e recitais védicos (os *mantras*). Portanto, métodos precisos de construção estavam envolvidos. Freqüentemente os resultados geométricas subjacentes a estas construções não eram enunciadas.

A construção dos altares não se restringia a formas geométricas simples. Existiam também construções de figuras com formas bastante elaboradas, como as de uma tartaruga, as de um pássaro voando ou as de um pássaro voando com a cauda inclinada. A área dessas figuras era calculada por decomposição em partes cujas formas geométricas eram conhecidas e suas áreas simples de calcular.

Os métodos de construção de altares contidos neles são para dois tipos de cultos: o culto doméstico onde os altares eram mais simples e o culto comunitário. Os altares quadrados e circulares bastavam para os ritos domésticos, enquanto que para o culto público eram exigidos altares mais elaborados, cujas formas eram combinações de retângulos, triângulos e trapézios. Um dos altares públicos mais elaborados tinha a forma de um falcão no momento exato de empreender o vôo. Acreditava-se que a alma de quem oferecesse um sacrifício em tal altar se transformava no falcão e voava direto para o paraíso.

Os *Sulbasutras* mais importantes, do ponto de vista matemático, são o Baudhayana, o Manava, o Apastamba e o Katyayana e foram os escritos em versos, sendo o Apastamba o mais conhecido.

*O Baudahayana Sulbasutra f*oi escrito por volta de 800 a.C, o *Mãnava Sulbasutra* escrito cerca de 750 a.C. o *Apastamba Sulbasutra* aproximadamente 600 a.C., e o *Katyayana Sulbasutra* cerca de 200 a.C.

Em 1875, G. Thibaut traduziu uma grande parte dos *Sulbasutras* e mostrou que o conhecimento matemático dos sacerdotes hindus não era pequeno.Ele traduziu o Baudhayana *Sulbasutra* em *The Pandit*, volume 9 (1874), volume 10 (1875), n.s. volume 1 (1876/77) e o Katyayana em *The Pandit*, n.s. volume 4 (1882). O Apastamba *Sulbasutra* foi traduzido por Bürk no *Zeitschrift der Deutschen* MorgenLändischen *Gessellschaft*, volume 56 (1902).

O mais antigo, o *Sulbasutra* de Baudhayana possui três capítulos, contém uma formulação geral do teorema de Pitágoras, um procedimento para obter uma aproximação para $\sqrt{2}$, e diversas construções geométricas, entre elas, algumas aproximadas para "quadrar o círculo" e outras para construir formas retilíneas cujas áreas são iguais às somas ou diferenças de outras formas. O texto seguinte mais antigo é a obra de Apastamba, que contém seis capítulos e trata com maior detalhe os temas examinados por Baudhayana. O *Sulbasutra* de Katyayana amplia um pouco mais a obra de seus predecessores.

Os conteúdos geométricos contidos nos *Sulbasutras* podem ser divididos entre três categorias:

- Resultados e teoremas geométricos explicitamente formulados;

- Procedimentos para construir diferentes formas de altares;
- Dispositivos algorítmicos.

Um outro ponto interessante na geometria dos *Sulbasutras* é que podemos identificar neles três dos postulados de construção de Euclides, a saber:

- Uma reta pode ser desenhada de um ponto A qualquer para um ponto B qualquer;
- Uma reta pode ser prolongada arbitrariamente além de B;
- Um círculo pode ser desenhado com algum ponto como centro e algum comprimento como raio.

Os *Sulbasutras* não contêm provas das regras descritas neles.

Através do uso dos diversos métodos e instrumentos, e da análise de como as necessidades de cada grupo social conduziram e exercitaram a criatividade dos indivíduos deste grupo os professores-alunos podem expandir suas próprias habilidades de modo que sintam-se encorajados a expressarem seus próprios sentimentos intuitivos e pensamentos, capacitando-os ao uso e desenvolvimento de seu próprio sentido estético e criativo.

Neste trabalho apresento diversas peças representativas da arte e do artesanato de alguns povos indígenas e africanos como exemplos, que podem ser utilizados nos cursos de formação de professores para o ensino e aprendizagem de vários conceitos e propriedades geométricas, e, também, como um modo de introduzir nestes cursos reflexões sobre diversos aspectos da educação matemática e do uso da dimensão histórica e da etnomatemática no ensino-aprendizagem da geometria.

Estes exemplos mostram a capacidade de abstração e a criatividade destes povos, alguns dos seus conhecimentos geométricos e são modelos de como a geometria é necessária à funcionalidade de certos objetos ou pode ser utilizada livremente nas criações artísticas. Entre as diversas formas de manifestação artística estão:

- *A cestaria que é uma das mais antigas manifestações artísticas na maioria das sociedades africanas; é uma atividade feminina, as peças possuem uma variedade de formas e decorações, são de uso familiar e também fonte de recursos com a venda nos mercados.*
- *Os utensílios domésticos são construídos com materiais diferentes – metal, barro, couro e cabaças e para usos diferentes. Dependendo da finalidade para o qual foi construído, recebem forma e decoração específicas.*
- *A utilização de motivos geométricos, da flora e da fauna na decoração e construção de peças do mobiliário, como por exemplo, bancos, cadeiras e tamboretes. Em algumas*

sociedades africanas as cadeiras e tamboretes têm um caráter pessoal e refletem, às vezes, características pessoais de quem as construiu ou seu status social. É interessante observar que as cadeiras e os tamboretes bem como seus utensílios domésticos, em algumas culturas africanas, são destruídos ou acompanham o proprietário quando morre.

- *A arte têxtil também é uma manifestação artística muito antiga na África que provavelmente já existia no vale do Nilo há 5000 anos atrás. Durante os últimos 500 anos esta arte floresceu em muitas partes da África e várias técnicas foram desenvolvidas enriquecendo a variedade de texturas, cores e desenhos utilizados na confecção e decoração dos tecidos. Determinadas cores e formas são utilizadas exclusivamente em cerimônias religiosas como casamentos, rituais de iniciação e sepultamentos. Encontramos também na cultura indígena algumas técnicas de decoração de tecidos onde o componente geométrico se evidencia.*

Apresento a seguir algumas informações sobre os povos africanos e indígenas citados neste trabalho. Essas informações podem ser complementadas através da consulta aos livros e trabalhos da bibliografia consultada.

2.7. Povos Indígenas Brasileiros

Em um curso de formação de professores o aprofundamento do conhecimento sobre aspectos sócio-culturais de diversos povos que estão diretamente relacionados com o conhecimento geométrico em discussão, em um determinado momento se torna necessário para uma melhor compreensão do significado sócio-cultural deste conhecimento. Portanto, cabe aos professores responsáveis pela formação estarem atentos e fornecerem condições para que as informações sobre os diversos povos não pareçam apenas informações de caráter geral, cuja omissão não afetaria a formação.

O mapa da figura 2.1 mostra aproximadamente a localização geográfica de cada grupo indígena citado neste trabalho.

1. Aratu-sapucaí
2. Kadiweu
3. Kuikuro
4. Tiriyó
5. Wayana
6. Javaé
7. Karajá
8. Karajá do Norte
9. Kayapó-Xikrin
10. Timbira
11. Xavante
12. Marubo
13. Ticuna
14. Aweti
15. Asurini do Xingu
16. Kaiabi
17. Suruí
18. Yanomame
19. Siona

Figura 7.1

2.7.1. Aratu/Sapucaí

Grupo de agricultores e ceramistas muito semelhantes, culturalmente, aos indígenas atuais, que viveram em regiões que vão desde o litoral de Pernambuco, Bahia e Espírito Santo até o interflúvio dos rios Araguaia e Tocantins e, no sul, até o rio Paranaíba durante um período que vai desde os últimos momentos da pré-história, ou seja, de 2 mil anos atrás, até a chegada dos europeus. Os agricultores-ceramistas da Tradição[5] Aratu-Sapucaí construíram grandes aldeias anulares localizadas em ambientes abertos, de relevo ondulado suave a forte, geralmente em ambientes de mata e raramente nos de cerrado. Alguns sítios também localizam-se nas proximidades de rios de porte médio a grande como o rio Corumbá (GO).

As aldeias apresentam-se nas formas circular, oval ou em ferradura, em áreas que variavam de 13000 m^2 a 345000 m^2, formadas por dois ou três anéis concêntricos, sendo o interno o mais antigo. Também estão presentes sítios pequenos.

O principal sustento dos grupos da Tradição Aratu esteve em produtos agrícolas, com destaque para milhos, feijões e tubérculos, embora com a ausência de mandioca amarga e na exploração de produtos obtidos através das atividades de caça e coleta.

---

[5] "tradição" é o termo usado em arqueologia para se referir a uma cultura pré-histórica.

Sobre a tecnologia dos grupos desta tradição que ocuparam o Centro-Oeste brasileiro destacam-se a manipulação da argila para a confecção de recipientes cerâmicos e a utilização da técnica de polimento na confecção de quebra-cocos, polidores, raspadores laterais, lâminas de machado polidas com garganta e semilunar, mãos-de-pilão polidas e martelos. Estes instrumentos líticos são básicos e característicos de grupos agricultores.

Estes grupos confeccionaram vasilhas periformes, esféricas ou elipsóides grandes. As bordas dos recipientes não apresentam reforço e as bases apresentavam-se arredondadas, côncavas ou furadas. São comuns as formas grandes, que comportam de dezenas a centenas de litros, embora sejam quase inexistentes os grandes pratos ou assadores.

2.7.2. Kadiweu

Também conhecidos como Caduveo, Cadiuéu, Ejwajigi, e como "índios cavaleiros" por sua destreza na montaria. Guerreiros, lutaram pelo Brasil na Guerra do Paraguai, razão pela qual, segundo contam, tiveram suas terras reconhecidas. Falam a língua Kadiweu pertencente à família lingüística Guaikurú e, com exceção de alguns velhos, mulheres e sobretudo crianças se comunicam com facilidade em português.

A Reserva Indígena Kadiweu está localizada na Serra da Bodequena (MS), ao sul do Pantanal.

Entre suas manifestações artísticas estão os finos desenhos corporais – estampam os rostos com desenhos minuciosos e simétricos, as belas peças de cerâmica como animais e enfeites de parede decorados com padrões que lhes são distintos. Encontram a matéria-prima de seu trabalho em barreiros especiais, que contêm o barro da consistência e tonalidade ideais para a cerâmica durável. Os pigmentos para sua pintura são conseguidos de areias dos mais variados tons, alguns dos detalhes sendo envernizados com a resina do pau-santo.

A produção de cerâmica está voltada quase que inteiramente para o comércio e constitui importante elemento de sua economia e sua confecção segue as técnicas tradicionais. Há uma priorização da decoração, tanto no processo de elaboração quanto na diversidade de motivos. Os motivos são abstratos e geométricos formados por traços retilíneos, triângulos, “espirais” , etc.

2.7.3. Kuikuro

Também conhecidos como Kuikuru, falam a língua Karib. A mandioca brava é muito importante, sendo sua base alimentar; mais de 70% da alimentação dos kuikuro é de mandioca consumida em forma de sopa, beiju e de mingau.

Além do cultivo da mandioca plantam milho, pequi, cabaça, algodão, pimenta, tabaco, magarito [espécie de batata], batata doce, banana e feijão.

O processo de ensino-aprendizagem dos kuikuro ocorre observando desde cedo os mais velhos. Prestar atenção é uma das características básicas do aprendiz: ele presta atenção para poder reproduzir todo aprendizado que lhe é ensinado. Ele também aprende a falar baixo, saber silenciar nos momentos de dor e gesticular suavemente. É uma educação que está incorporada ao fazer diário, depende da percepção visual, mas abre possibilidades de requerer aulas particulares dos especialistas, de acordo com certo pagamento. Além da reprodução que é privilegiada neste contexto, é necessário que a produção do conhecimento continue avançando à medida que novas informações são obtidas.

As figuras geométricas, para este povo, não são simples desenho, mas têm significado simbólico/mitológico: além de fazer parte da vida do povo como forma de identidade, é também forma de comunicação visual e de transmissão do saber produzido na teoria e empiria, fonte de observação sistemática dos astros sol e lua ...

2.7.4. Tiriyó

Também conhecidos como Trio, Tarona, Yawi e Pianokoto falam a língua Karib. Grupo localizado no recôncavo da serra do Tumucumaque e áreas adjacentes, junto às cabeceiras dos rios Paru de leste, Paru de oeste, Tapanam e outros. O formato da aldeia varia entre oval e arredondada. As casas são dispostas à volta de um espaço livre destinado a atividades cerimoniais. O agrupamento de unidades habitacionais forma o centro do estabelecimento rodeado pelas roças e, além destas, pela mata.

2.7.5. Wayana

Também conhecidos como Waiana e Uaiana, são um grupo indígena que falam a língua Karib e vivem na região do noroeste Amazônico, que abrange a bacia do Alto Rio Negro, onde a linha fronteiriça entre o Brasil e a Colômbia faz um desenho que lembra uma cabeça de cachorro .

Na decoração corporal transmitida aos Wayana através de mitos são empregadas as pinturas de lagarta e de seres sobrenaturais, sobretudo as de okoimã “cobra-grande”, feitas com jenipapo ou urucum.

Uma das decorações do artefato “motivos da roda de teto” compreende motivos que são variações da representação da “cobra-grande” e significa a unidade e variedade da cultura

Wayana. No entanto, nessa roda são igualmente pintados aves, borboletas e outros seres relacionados com o xamanismo, nomes ou figuras de “brancos”.

2.7.6. Javaé

Também conhecidos como Karajá – unidade mais ampla na qual se inclui – Itya e Mahãdu, se auto denominam *Itya Mahãdu* que significa "o Povo do Meio" e são um dos três subgrupos em que se dividem os índios Karajá . Falam a língua karajá pertencente ao tronco macro-jê que ainda é o principal meio de comunicação entre os Javaé, mas todos falam e entendem um mínimo de português.

Para eles, a vida em sociedade é o preço que os seres humanos tiveram que pagar pela curiosidade de conhecer o novo.

Habitam o vale do Rio Araguaia, principal afluente do rio Tocantins, até pouco tempo atrás considerado um dos rios mais piscosos do mundo. O Araguaia forma, em seu médio curso, a maior ilha fluvial do mundo, a de Bananal, no estado do Tocantins, junto à fronteira de Mato Grosso e é considerada pelos Karajá e Javaé como o lugar mítico de onde surgiram.

2.7.7. Karajá

Também conhecidos como Carajá e *Iny* – que significa “nós”. O nome Karajá não é a auto-denominação original. É um nome tupi que se aproxima do significado de "macaco grande". Falam o karajá uma língua pertencente ao tronco lingüístico macro-jê e, em algumas aldeias como em Xambioá (TO) e em Aruanã (GO), o português é dominante.

A alimentação da comunidade vem da pesca e da caça. Também aproveitam os frutos do cerrado, como o oiti e o pequi, a coleta do mel silvestre e cultivam milho, banana, mandioca e melancia.

Aos homens, que equivalem simbolicamente à importante categoria dos mortos, cabe a defesa do território, a abertura das roças, as pescarias familiares ou coletivas, as construções das casas de moradia, as discussões políticas, a negociação com a sociedade nacional e a condução das principais atividades rituais. As mulheres são responsáveis pela educação dos filhos até à idade da iniciação para os meninos, e de modo permanente para as meninas.

A manifestação artistica dos Karajá envolve técnicas de construção de casas, tecelagem de algodão, adornos plumários, artefatos de palha, madeira, minerais, concha, cabaça, córtex de árvores e cerâmica, além da pintura corporal que é significativa para o grupo e realizada pelas mulheres utilizando o sumo do jenipapo, a fuligem de carvão e o urucum. A cestaria é feita por homens e mulheres, mas a cerâmica é uma atividade exclusiva das mulheres.

2.7.8. Karajá do Norte

Os Karajá do Norte, mais conhecidos como Xambioá, estão divididos em duas aldeias, localizadas à margem direita do rio Araguaia. Falam o xambioá, um dialeto específico da língua karajá, pertencente ao tronco Macro-Jê, habitam a região do baixo Araguaia e, especificamente, nas proximidades de seu trecho encachoeirado. As duas aldeias atuais, Xambioá e Kurehe, no município de Araguaína (TO), localizam-se à margem direita do Araguaia, distantes seis quilômetros uma da outra.

Suas manifestações religiosas, formas de organização social e política, bem como suas atividades de subsistência encontram-se centradas na sua relação com o rio durante o ciclo de estações. Cada estação pressupõe um ritmo e atividades sociais bem definidas.

A base da alimentação do grupo é conseguida com a pesca e coleta daquilo que o rio e seus terrenos marginais lhes oferecem e é complementada pela produção de suas lavouras e pelos gêneros agrícolas que compram fora da aldeia O peixe é a principal fonte de proteínas para os Karajá do Norte e a pesca se faz basicamente ao longo do rio Araguaia ou em lagoas situadas principalmente na margem paraense, subindo o rio Maria.

Na caçada as espécies de animais mais procuradas são o caititu, veados, tatus, macacos e jabutis e a atividade de coleta atualmente se limita a diversas frutas sazonais tais como o marmelo, bacaba, macaúba e anajá em dezembro, do açaí em agosto e do cajá em fevereiro. Além das espécies nativas, o grande número de mangueiras existentes na aldeia fornece-lhes boa quantidade de frutos nos meses de dezembro e janeiro.

2.7.9. Kayapó-Xikrin

Os Xikrin, também conhecidos como Put Károt, falam a língua kayapó (ou mebengokré), da família lingüística jê, tronco lingüístico macro-Jê. Valorizam a oratória, considerada um atributo dos homens e a audição. A fim de aguçar estas qualidades, os Xikrin perfuram, logo na infância, os órgãos correspondentes (orelhas e lábios). Ouvir está diretamente relacionado ao saber, à aquisição do conhecimento. Entre si, usam apenas a própria língua embora também falem o português.

A caça e a pesca podem ser atividades individuais ou coletivas. Cabe aos homens a confecção da maior parte dos ornamentos corporais, cestaria, esteiras, instrumentos musicais, bordunas, arcos e flechas. O uso dos recursos naturais é extremamente diversificado. Os

Xikrin conhecem e distinguem, em detalhes, a fauna e a flora. Eles definem-se como essencialmente caçadores, apesar de sua dependência dos produtos da roça. Ultimamente, algumas aves entraram no cardápio. Utilizam a agricultura de coivara e plantam várias qualidades de batata-doce, inhame, macaxeira, milho, abóbora, mamão, bananas e algodão.

O ensino tradicional dá-se por meio da convivência e da observação participante. Os adultos orientam, corrigem e às vezes ensinam, de modo mais sistemático, cantos, coreografias e seqüências rituais a turmas de meninos e meninas. Nota-se a importância pedagógica da repetição e da participação nos diferentes acontecimentos. Um indivíduo, com marcada inclinação para desempenhar uma atividade específica, aprende de modo mais contínuo com aquele que é um especialista reconhecido naquela atividade. As meninas aprendem a pintura corporal em casa, com parentes adultas. Os mitos são contados pelos velhos, sob forma de conto, de drama ou de discurso político.

2.7.10. Timbira

Timbira é o nome que designa um conjunto de diferentes grupos étnicos que falam uma só língua, o timbira, que pertence à família Jê do tronco macro-jê, certamente com algumas diferenças dialéticas entre si.

Os grupos timbira estão localizados ao sul do Maranhão, leste do Pará e norte do Tocantins. Os que estão mais para sudeste habitam uma área relativamente plana, interrompida por morros de paredes verticais e cimos chatos, muitas vezes escalonados, cobertos pelo cerrado e cortados por cursos d'água, ao longo dos quais se estendem matas-ciliares. Os situados mais ao noroeste, ficam na transição do cerrado para a floresta amazônica.

Com relação às criações artísticas cada povo timbira usa cabaças como recipientes para água e alimentos, em lugar de cerâmica; fazem cestos, esteiras, faixas, assam bolos de mandioca e carne, envolvidos em folhas de bananeira brava, sob pedras previamente aquecidas; água ou caldos também podem ser postos a ferver quando colocados em cabaças ou capembas, mergulhando-se no líquido pedras aquecidas. Hoje, o uso de pedras aquecidas é mais freqüente no preparo de bolos para os ritos; para a alimentação cotidiana se usam panelas de ferro.

2.7.11. Xavante

Auto denominam-se *A'uwe* e também são conhecidos como *Akwe* e *Awen*, falam uma língua jê do tronco macro-jê.

Habitam mais de 70 aldeias nas oito áreas que constituem seu território atual, na região compreendida pela Serra do Roncador e pelos vales dos rios das Mortes, Culuene, Couto de Magalhães, Botovi e Garças, no leste matogrossense.

Trata-se de um povo forçado a migrações constantes sempre em busca de novos territórios onde pudessem refugiar-se e, neste percurso, em choque ou alianças circunstanciais com outros povos com quem se encontraram no trajeto que os trouxe até sua localização atual.

Os Xavante são conhecidos principalmente por sua organização social de tipo dualista, ou seja, trata-se de uma sociedade em que a vida e o pensamento de seus membros estão constantemente permeados por um princípio diádico, que organiza sua percepção do mundo, da natureza, da sociedade e do próprio cosmos como estando permanentemente divididos em metades opostas e complementares. Trata-se, na verdade, da chave da elaboração cultural dos Xavante, construída e reconstruída através dos tempos e das variadas experiências históricas, mas sempre mantida como fundamento de sua maneira original de ser, pensar e viver

2.7.12. Marubo

Falam a língua pano. O povo Marubo provavelmente é o resultado da reorganização de sociedades indígenas dizimadas e fragmentadas por caucheiros e seringueiros no auge do período da borracha, conhecidos por este nome embora não constitua uma auto-denominação e falam uma língua, chamadas por ele de *Chaináwavo*, que faz parte da família Pano. Atualmente, os jovens do sexo masculino podem se comunicar também em português e os mais velhos, devido ao contato com os caucheiros peruanos no passado, conhecem algumas palavras de *quêchua* e de espanhol.

Os Marubo vivem no alto curso dos rios Curuçá e Ituí, da bacia do Javari, no município amazonense de Atalaia do Norte, uma região cheia de pequenas colinas, com cimos não raro ligados por cristas entre si, coberta pela floresta amazônica.

As roças se estendem a partir da colina onde se ergue a maloca, para os vales e colinas vizinhas e plantam os três vegetais básicos na alimentação – macaxeira, milho e banana – além de mamão, goiaba, tabaco, urtiga e algodão.

A caça e a pesca complementam a alimentação dos Marubo. Eles caçam o macaco preto e o barrigudo - as duas únicas espécies de primatas que consideram comestíveis - o caititu, a anta, o porco-queixada e, no período menos chuvoso, a paca. Também abatem freqüentemente o cujuim e o mutum.

Durante a estação menos chuvosa extraem o látex das seringueiras, tendo cada homem adulto seu tapiri para defumar a borracha e suas "estradas" (caminhos que, saindo do tapiri e a ele retornando, ligam as seringueiras) e durante a estação chuvosa extraem a madeira, que são negociados com os comerciantes.

2.7.13. Ticuna

Os Ticuna, autodenominados Magüta, vivem em aldeias situadas do Alto dos Solimões, Amazonas. Também conhecidos como Tikuna, Tukuna e Magüa, falam a língua tikúna.

Os primeiros contatos dos Ticuna com os brancos ocorreram no final do século XVII, acentuando-se a partir das últimas décadas do século passado.

Apesar das mudanças motivadas pelas frentes de expansão, agências de contato e missões religiosas, os Ticuna mantêm viva, ainda hoje, sua cultura preservando seus costumes e valores.

O desenho é uma manifestação artística que faz parte das experiências cotidianas desse povo, representa uma forma de expressão de sua identidade cultural e são aplicados tanto nos artefatos de uso interno quanto naqueles confeccionados para a venda.

As máscaras rituais são consideradas por alguns pesquisadores como uma das manifestações mais ricas da arte Ticuna. Porém, o potencial artístico destes indígenas não se restringe à feitura de máscaras mas, se estende à tecelagem, cerâmica, escultura, etc.

Os cestos apresentam um elenco muito variado de motivos formados por elementos geométricos simples como, quadrados, losangos, triângulos etc. e a nomenclatura destes motivos podem estar associadas à partes de certos animais como asa de borboleta, dente de jacaré, etc.

A tecelagem está intimamente ligada a mulher. A fabricação dos fios é uma das primeiras tarefas desenvolvidas pelas meninas e na adolescência a importância dessa atividade ganha uma expressão ritual enquanto que a confecção da cerâmica apesar de ser tarefa preferencialmente feminina, pode ser exercida pelo homens. É na superfície das vasilhas que as mulheres executam seus desenhos.

Na esfera ritual, os suportes mais representativos da arte gráfica são as máscaras, os escudos, as paredes externas do “curral” , o *turi* e o corpo. Na confecção das máscaras, ao lado dos desenhos geométricos, os Ticuna usam figuras de caráter realista inspiradas no meio ambiente natural, social etc.

A confecção e uso das máscaras são de domínio dos homens, que também se encarregam da feitura de grande parte dos objetos rituais como instrumentos musicais, bastões, etc. A pintura da face porém, pode ser realizada por ambos os sexos e é empregada hoje em dia apenas durante os rituais, por todos os participantes inclusive crianças.

2.7.14. Aweti

Também conhecidos como Aueti, falam o aweti uma língua do tronco tupi. Os awetis moram numa aldeia no Parque Nacional do Xingu (MT), foram encontrados no final do século passado pelo etnólogo alemão Karl von den Steinen e permaneceram praticamente isolados até 1940. Hoje em dia, mantêm relações intermitentes com a população regional e têm aumentado o seu grau de bilingüismo em português. Os awetis vivem da pesca, caça, coleta e agricultura.

2.7.15. Asurini do Xingu

Também conhecidos como Awaeté, falam o tupi-guarani uma língua do tronco tupi.

Asurini significa "vermelho" e é o nome dado a um dos grupos que habitavam o Baixo Xingu. Este grupo se autodenomina *Awaeté*, que significa "gente de verdade", mas diante dos "brancos", chamam-se *At(*s)urini*, da palavra asuruni. A língua falada pertence à família lingüística tupi-guarani do tronco tupi. A única aldeia atual se localiza à margem direita do Rio Xingu. As roças e os locais de caça, pesca e coleta estão situados entre as margens dos rios Xingu, Piranhaquara e Igarapé Piaçava.

A arte asurini se manifesta na cerâmica - muito valorizada entre eles – na tecelagem, cestaria, armas, enfeites corporais, bancos de madeira e instrumentos musicais.. Em geral, a cerâmica é decorada com motivos geométricos.

Além de cerâmica, as formas geométricas também são utilizadas na decoração de cuias , arcos e enfeites e na ornamentação do corpo, que pode ser tatuado ou pintado de jenipapo. Essas figuras podem representar tanto os elementos da natureza quanto os seres sobrenaturais.

2.7.16. Kaiabi

A origem do nome Kaiabi perde-se no tempo e hoje os próprios índios não sabem dizer de onde surgiu e qual seu significado. A língua falada é da família tupi-guarani do tronco tupi mas todos os Kaiabi que habitam atualmente o Parque do Xingu são bilingües dominando, além de sua própria língua, também o português. Os Kaiabi, em sua maioria, habitam atualmente a área do Parque Indígena do Xingu no Mato Grosso.

Os Kaiabi são um grupo com uma forte tradição agrícola e sua horticultura é muito diversificada, compreendendo dezenas de variedades de plantas cultivadas e têm um sistema agrícola bastante elaborado. Plantam diversas variedades de mandioca utilizadas para a produção de farinha, beijus e mingaus, além do milho, algodão, amendoim, batata, cará, banana, fava, cana, abóbora e melancia.

A base de sua alimentação é composta pela farinha de mandioca e pelo peixe, é complementada por beijus, mingaus à base de mandioca, milho, amendoim, banana, frutas silvestres, etc. Anteriormente a caça tinha um papel mais importante na dieta, mas a maior sedentarização do grupo na calha dos rios principais, aliada, entre outros fatores, à rarefação de alguns animais, contribuiu para que a pesca tenha se tornado a principal fonte de proteína animal para o grupo.

Os Kaiabi têm uma cultura material elaborada e bastante diversificada incluindo suas peneiras, apás (um tipo de peneira) e cestos (confeccionados pelos homens), ornamentados com uma grande variedade de complexos padrões gráficos, que representam figuras da rica cosmologia e mitologia do grupo. O trabalho artesanal feminino mais elaborado é a tecelagem do algodão para a fabricação das redes e tipóias. Atualmente, os itens mais produzidos são os colares de tucum lisos ou com figuras zoomórficas, também confeccionados pelas mulheres.

2.7.17. Surui

Também conhecidos como Aikewara, falam a língua akwáwa da família tupi-guarani do tronco tupi e a maioria também fala o português. Estão situados no sudeste do Pará, no município de São João do Araguaia, a cerca de 100 quilômetros da cidade de Marabá e possuem uma grande aldeia, denominada *okara*, de formato retangular, com um pátio central no qual eram realizados os seus rituais.

No passado a agricultura consistia em sua principal atividade econômica. Faziam grandes roças, onde plantavam várias espécies de mandioca, bananas, inhame, batata doce, milho, pimenta, algodão e fumo. A atividade de caça era bastante privilegiada em uma região em que eram abundantes as antas, veados, queixadas, caititus, pacas, tatus, macacos e cotias. Entre as aves preferiam os mutuns e jacus, mas, em caso de necessidade consumiam também arara e várias espécies de papagaio. A pesca era uma atividade pouco importante, uma vez que viviam afastados dos grandes rios. A coleta complementava a busca por alimentos. Nos dias de hoje, a dieta alimentar foi modificada pela diminuição da caça e pela introdução de uma pecuária pobre e do cultivo de arroz.

2.7.18. Yanomame

Também conhecidos como Kuikuru, falam a língua yanomami.

A palavra *yanomami urihi* designa a floresta e seu chão. Significa também território: *ipa urihi*, "minha terra", pode referir-se à região de nascimento ou à região de moradia atual do enunciador.

Os Yanomami são caçadores, recoletores e camponeses semi-nômades. Viviam até os anos 60 do século passado completamente isolados na selva dificilmente penetrável. Confeccionam objetos como o banco de subir em palmeiras, pontas de seta, redes de descanso, aljavas, arcos, recipientes alongados para sopa de banana, cestos redondos entrelaçados hexagonalmente, taças e gamelas de cascas de frutos cortadas ao meio para beber. Os grupos locais Yanomami ou residem em uma casa plurifamiliar em forma de cone ou de tronco de cone chamado yano ou xapono ou em aldeias compostas de casas do tipo retangulares.

O espaço de floresta usado por cada casa-aldeia Yanomami pode ser descrito esquematicamente como uma série de círculos concêntricos, cada um deles delimitando áreas de usos distintos. O primeiro círculo delimita a região onde acontece a pequena coleta feminina, a pesca individual ou coletiva, a caça ocasional de curta duração e as atividades agrícolas; o segundo círculo delimita a área de caça individual e da coleta familiar do dia-a-dia e o terceiro círculo delimita a área das expedições de caça coletivas de uma a duas semanas que antecedem os rituais funerários e as longas expedições plurifamiliares de coleta e caça durante a fase de maturação das novas roças. Estão situadas na região limitada pelo terceiro círculo as roças novas e as antigas, junto às quais se acampa esporadicamente – para cultivar nas primeiras, colher nas segundas – e em cujos arredores a caça é abundante.

2.7.19. Siona

Os índios Siona vivem ao longo dos rios Putumayo e Aguarico no sul da Colômbia e norte do Equador. Apesar de terem sido um grupo grande e poderoso, os Siona foram reduzidos a pequenos agrupamentos cercados por colonizadores brancos.

Devido ao processo de aculturação ocorrido especialmente nos últimos vinte anos do século passado a cultura material vem refletindo a da população rural colombiana e o espanhol está se tornando a língua principal. A expressão artística tradicional diminuiu, somente os índios mais velhos continuam a pintar o rosto e adornar o corpo com colares.

Uma das formas mais importantes da expressão artística consiste de motivos geométricos, usados para decorar rostos, cerâmicas, lanças, coroas e outros objetos. Esses motivos são uma forma de arte que se baseia em um número concreto de elementos que são combinados e recombinados de acordo com as regras padronizadas, de modo a criarem um número infinito de desenhos.

2.8. Alguns países africanos e povos

A seguir apresento algumas informações sobre as regiões onde vivem os povos africanos cujo conhecimento geométrico é discutido neste trabalho. [Figura 8.1]

1. Angola. Tchokwe.
2. Bafut
3. Benin
4. Bushongo
5. Congo
6. Fulbe
7. Ghana
8. Ioruba
9. Lesotho
10. Lunda
11. Macondes
12. Mali

Figura 8.1

2.8.1. Angola

A República Popular de Angola está situada na África Ocidental, sua capital é Luanda e a língua oficial é o português, mas alguns povos falam um dos idiomas *umbundu*, *kimbundu*, *kikongo*, *kwanyama* e outras línguas bantu.

Durante o século XIV uma serie de reinos instalaram-se no norte de Angola, dos quais destaca-se pela sua organização administrativa, o Reino Congo. Um século mais tarde, em 1483, quando os navegantes portugueses chegaram ao litoral deste reino, este se encontrava em pleno desenvolvimento e expansão. Imediatamente iniciaram proveitosas relações comerciais entre os reinos Congo e de Portugal. Mas esta relação entre iguais não durou muito e quando os portugueses iniciaram o comércio de escravos no território Congo começou a decadência que terminou com a ocupação e domínio político dos portugueses sobre toda

Angola. Estima-se que mais de milhão de seus habitantes foram escravizados e enviados para o Brasil durante os séculos XVI e XVII.

Em 1575 foi fundada a primeira cidade de Angola, São Paulo de Luanda, que foi invadida em 1641 pelos holandeses e reconquistada em 1648 com a participação de guerreiros indígenas brasileiros. Nesta ocasião, o nome da povoação foi alterado para São Paulo de Assunção de Luanda. Em 1662, Luanda é elevada à condição de cidade, tendo seus moradores privilégios iguais aos dos cidadãos do Porto, em reconhecimento ao papel decisivo de seus habitantes na reconquista de Angola.

A proibição do comércio de escravos em 1836 e a independência do Brasil de Portugal levou os portugueses a intensificarem e centralizarem seus interesses coloniais em outros territórios, inclusive a Angola.

Como muitas das artes africanas, as máscaras de madeira e esculturas de Angola têm um papel importante nas cerimônias rituais representando vida e morte, a passagem da criança para o adulto, celebração de uma colheita e marcando o início da estação de caça.

Os artesãos angolanos trabalham com a madeira, o bronze, o marfim,fazem peças de cerâmica etc. Cada grupo étnico tem suas próprias características na arte. Uma das peças mais famosas da arte angolana é o "pensador de Tchokwe" considerada uma obra-prima de harmonia e simetria.

- **Os Tchokwe**

Os Tshokwe são povos bantu matrilineares que ocupavam originalmente a Serra de Mazumba, Norte de Angola. Em meados do século passado emigraram através do norte e nordeste apropriando-se de vastos territórios e atravessando a fronteira atual entre Angola e Zaire.

Os Tshokwe vivem entre a República Democrática de Congo e Angola. Sua origem pode estar localizada em Mbubdu e Pgmeus de Mbuti. Sua história data de antes do séc. XV, quando uma rainha Lunda se casou com um príncipe de Luba. Um membro importante da aristocracia de Lunda desaprovou o matrimônio e eles migraram para o sul da atual Angola. Uma vez estabelecidos, fundaram vários reinos, cada um deles liderado por um deus rei. Estas tribos são conhecidas como o Tshokwe, o Luena, o Songo, o Imbagala e o Ovimdubu.

No período anterior à ocupação colonial, as mulheres Tchokwe e os cativos trabalhavam na agricultura, e os homens dedicavam-se mais à caça. Os artesãos ocupavam-se e continuaram a ocupar-se durante o domínio português da arte do ferro, da pintura, escultura, fabricação de móveis e da técnica de trançados.

A cultura Tchokwe é bem conhecida pela sua arte decorativa, que abrange desde a ornamentação de esteiras e cestos entrançados, trabalho em ferro, cerâmica, escultura, gravação de cabaças e tatuagens até pinturas nas paredes das casas e desenhos na areia.

Com relação aos desenhos, os Tchokwe cultivam arte ornamental bastante peculiar vistas freqüentemente nas paredes das casas mas também na areia lisa da aldeia Estes desenhos chamados Sona (nome que se dá à escrita) aparecem pintados nas paredes das casas por homens, mulheres e crianças.

Quando os Tchokwe se encontram reunidos costumam passar o tempo conversando e ilustram suas conversas com desenhos na areia. Muitos destes desenhos pertencem a uma velha tradição e desempenham papel importante na transmissão do conhecimento e da sabedoria de uma geração para a seguinte.

A aprendizagem do significado e execução dos desenhos é transmitida em dois momentos: os mais simples em significado e execução são transmitidos aos rapazes durante a fase "escolar" dos ritos de iniciação e os de significado e execução mais complexos, só especialistas – *akwa kuta sona* (conhecedores de desenho) os transmitem. Estes mestres do desenho faziam parte de uma elite, que transmitiam o conhecimento dos seus antepassados para seus descendentes diretos.

Para facilitar a memorização dos padronizados pictogramas e ideogramas , os *akwa kuta* sona inventaram uma interessante mnemônica :

- Limpam e alisam o chão;
- Marcam com as pontas dos dedos uma rede ortogonal de pontos eqüidistantes. Os pontos (**tobe**) são marcados de baixo para cima e do meio para as extremidades.Em muitos casos são feitas novas séries de pontos nos centros dos quadrados da rede inicial;
- Após a marcação dos pontos da rede pode-se iniciar a execução propriamente dita do desenho que normalmente é formado pelo traçado de uma ou mais linhas que abraçam os pontos da rede;
- Existem normas para começar e acabar o desenho e o padrão deve ser obedecido de modo rigoroso.

Com a penetração e ocupação coloniais a tradição de desenho entrou em decadência. A maior coleção de sona e a mais importante foi publicada em 1983 e contém 287 desenhos diferentes recolhidos nos anos 40 e 50. Os estudos de Gerdes sobre a construção dos desenhos sona e sua incorporação no ensino da matemática mostra a riqueza de conhecimento matemático que pode ser explorada a partir dos desenhos.

Atualmente são conhecidos pelos objetos de arte produzidos para celebrar e validar a corte real. Estes objetos incluem tamboretes e cadeiras esculpidas e usadas como tronos. A maioria das esculturas são retratos que representam linhagens reais, cetros, e lanças. Além disso, eles usam três tipos de máscaras: as sagradas, as de iniciação e as de dança sendo que apenas no último grupo estão incluídas máscaras femininas.

2.8.2. Bafut

O povo Bafut, como a maioria dos povos vizinhos, procede do norte do atual Camarões de onde saíram no século XVII pressionados pelos Fulani para estabelecerem-se nas terras montanhosas que ocupam hoje.

O antigo reino Bafut até hoje traz uma reforma constitucional que supunha a restauração de algumas das competências políticas abolidas pelos franceses nos anos 20 e 30, não é senão "cheferie" mas, uma chefatura onde o fan (antigo rei de Bafut) como chefe tradicional administra a justiça em assuntos de terras e pouco mais.

O sistema político Bafut era centrado no Fan, o chefe político e religioso do povo. Ele tinha diversas funções entre elas o controle das relações exteriores e o estabelecimento de leis. Toda justiça era feita em seu nome. Ele era o tribunal de recursos final e tinha o poder sobre a vida e morte de seus súditos. Como sacerdote chefe ele oferecia sacrifícios a seus antepassados e intercedia com eles para o bem-estar do povo.

2.8.3. Benin

Cidade da Nigéria pertencente hoje à Província do Sul.

O Reino de Benin – formado por povos *edos* - foi um dos que alcançou maior nível cultural na África Ocidental e que obteve este nome pelos sacrifícios humanos que nele se faziam.

Praticamente inexistem informações sobre as origens de Benin. Na tradição oral fala-se da existência de um Estado – uma forma de república – anterior ao reino. Neste então, os *edos* teriam-se dirigido a Ifé para pedir ao ioruba Odudua um príncipe que governasse Benin.

Oraian, filho do deus-rei, teria esposado uma mulher nativa e fundado a dinastia governante. O mito da fundação sugere a possível chegada de um clã dirigente ioruba aos territórios edos.

Com relação a arte e artesanato sabe-se que a tradição artística de Benin sofreu forte influencia da tradição ioruba. Na pequena cidade-estado que surgiu no delta do Níger, nos fins do séc. XII, as artes e ofícios eram praticados com grande habilidade. Trabalhavam com perfeição a madeira, os tecidos e o marfim. Foram os objetos de terracota e bronze de Benin que exigiram, no fim do séc. XIX e no séc. XX, uma reformulação radical do que se havia dito sobre arte africana. O naturalismo e a beleza das peças de Benin e Ifé impressionaram o mundo científico e artístico. Só estas regiões da África conheceram o artesanato do vidro. O trabalho em madeira, marfim, cobre, ouro, tecidos, etc. alcançou alto nível técnico.

Quando os portugueses penetraram no golfo de Guiné introduzindo o comércio negreiro, o reino de Benin já era um reino importante, com centro na cidade homônima. Ele encontrava-se a leste de Níger e solidamente implantado no delta do grande rio.

O primeiro contato dos portugueses com Benin aconteceu por volta de 1480 e o processo de expansão do reino foi acelerado quando Benin incorporou-se ao comércio negreiro fazendo o tráfico de escravos que vendiam a Costa do Oro.

Benin entrou em decadência desde o fim do séc. XVII mas subsistiu até o séc. XIX. O reino chegou a alcançar significativa importância e a controlar territórios que iam do Niger até Lagos – região essencial para o comércio negreiro

Dizem que a influência de Benin se estendia por um lado até Serra Leoa e por outro até o Congo, devido talvez a crença de que o *djudju* o "espírito" de Benin era o mais poderoso da África Ocidental. Este espírito residia na cidade de Benin, lugar de uma poderosa teocracia, que aparentemente dominava de fato o *oba* o rei.

2.8.4. Bushongo

O povo Bushongo é o maior grupo étnico dos povos que formaram parte do Império Kuba. No séc XVI pequenos grupos procedentes de distintos lugares de ambas as margens do rio Congo emigram para o território do atual Kasai, ocupados então por grupos Twa e Kete. Da sua proximidade lingüística com o idioma Mongo os Bushongo provavelmente procediam do norte. Os Bushongo, sendo mais numerosos se tornam os dirigentes de todos os grupos criando o Império Kuba que dura mais de três séculos, até a chegada dos colonizadores europeus.

Desde a criação do Império Kuba até nossos dias os dirigentes políticos das populações Kuba pertencem ao povo Bushongo. O rei (Nyim) é ajudado em seus deveres por mais de cem conselheiros que são representantes das diferentes populações. Os líderes de cada povo tem a obrigação de dar conta de sua gestão ante o Nyim e de levar a cabo as decisões que este adota. O Nyim é o descendente direto do unificador mítico do Império Kuba, o Rei Shyaam.

A história oral de Kuba conta a criação do mundo por Bumba que determinou que os Bushongo sempre seriam a classe governante. Este deus criador não é formalmente objeto de culto. Em outra época parece que se praticava uma religião baseada no culto aos antepassados, mas faz tempo que desapareceu, praticando-se a advinhação para descobrir as causas do mal. O êxito na caça é considerado como um presente dos deuses. Os adivinhos empregam freqüentemente cães de caça esculpidos em madeira para esfregando-os chegar ao conhecimento que os permite fazer um oráculo.[6]

A história oral de Kuba fala da criação do mundo por Bumba que vivia só na água. Um dia ficou doente e começou a vomitar. Primeiro vomitou o sol, a lua, as estrelas e a terra. Mais continuava enfermo e então vomitou nove animais: um leopardo, uma águia, o crocodilo, *Yo* (um peixe pequeno), uma tartaruga, *Tsete* (o relâmpago, que foi expulso da terra por causar problemas constantes), uma garça, um escaravelho e uma cobra. Depois, vomitou seus três filhos. Todos eles, animais e humanos se encarregaram de criar o que faltava, cada um em sua especialidade. Assim o escaravelho criou o resto dos insetos, etc.

2.8.5. Congo (Kongo)

Quando o português Diego Cão e seus homens chegaram, em 1482-3, a foz do rio Zaire[7] e desembarcaram no porto africano de Mpinda, o manikongo Nzinga Kuwu, sétimo de sua dinastia, reinava sobre uma região tão grande quanto um quarto da França atual. O reino teria sido fundado por seu ancestral Ntinu-Wene, chefe kikongo que, chegou do norte, atravessou o grande rio, casou-se com uma mulher nobre do clã, detentora dos direitos da terra e foi reconhecido como senhor pelo chefe desta comunidade. Assumiu, então, o título de manikongo.

Os sucessivos manikongos aumentaram o território com conquistas militares ou alianças matrimoniais.

---

[6] Oráculo: mensagem ou resposta que procede de um deus. Local onde se consulta um deus. Pessoa sábia e autorizada cuja opinião se considera verdadeira.

[7] Nzade ou Nzare : o rio que engole outros

A organização política e social da formação africana estruturava-se a partir da aldeia matrilinear dirigida por um chefe da terra que não pertencia a aristocracia. Acima deste, governavam os chefes de distritos e de províncias. O manikongo nomeava autocraticamente os governadores das províncias e estes, em geral, os dos distritos.

O manikongo, autoridade máxima desta pirâmide política, não transmitia hereditariamente o seu poder. Nos primeiros tempos, todo descendente masculino do fundador podia pretender o trono, quando de uma sucessão. A escolha era efetuada por um colégio eleitoral de nobres, mas, em geral, era a força das armas que decidia a quem caberia o poder. O título de manikongo possuía caráter sacro; o seu detentor, cometendo incesto com a irmã, perdia seus direitos de família. Alcançava assim, uma situação que lhe permitia governar, sem favorecimento, todas as famílias.

A economia desta construção política baseava-se fundamentalmente numa agricultura cerealística itinerante. Foram desenvolvidas práticas e técnicas agrícolas complexas que procuravam tirar o máximo proveito da abundância de terras em relação à realidade demográfica de então – terras pouco férteis e ocorrência sistemática de secas. O esforço agrícola assentava-se sobretudo no trabalho feminino.

Nesta agricultura cerealística itinerante, os instrumentos simples de ferro desempenhavam papel importante. Eram sobretudo as atividades agrícolas que garantiam a existência de concentrações populacionais como Mbanza Kongo, capital do reino e residência de manikongo.

No reino do Kongo, sua capital desempenha um importante papel social e econômico. Dela partiam as principais caravanas envolvidas no comércio de ferro e sal com o interior. O manikongo tinha o monopólio do sal que era uma mercadoria de grande valor. O nzimbo, uma espécie de caramujo, era a moeda de circulação nacional usada nestas trocas. A pesca do caramujo, realizada apenas nas águas da ilha de Luanda, era um monopólio real. Comerciavam-se objetos de ferro, de marfim, de cerâmica, tecidos vegetais, jóias de cobre, etc.

Os artesãos e mercadores não eram, na maioria das vezes, uma classe especializada. Os artesãos trabalhavam sem problemas o cobre, o ferro, a argila, a madeira, o marfim, etc. Tecia-se fibra vegetal e o vinho de palmeira era muito apreciado.

2.8.6. Fulbe

Os Fulbe, também conhecidos como Fellatas ou Ful (no singular) , Fellani, Pul (no singular) e pulbe (no plural) era um povo, de origem nômade, dedicado principalmente a criação de gado, que habitavam regiões da África Central e Ocidental.

A partir do séc. XV grupos de Fulbe começaram a estabelecer-se nas regiões mais férteis ao sul do Saara integrando-se com grupos ali estabelecidos.

Em meados do século XVII abraçaram o islamismo, fundando estados independentes e inaugurando o sistema de conquistas, que não abandonaram de tudo. Segundo uma tradição muito longa entre eles, seus antepassados eram brancos, pelo qual algumas tribos dão-se a denominação de "homens brancos".

As principais áreas ocupadas pelos Fulbe eram a região de Hausa na Nigéria do norte, de Adamawa em Camarões e a região de Futa-Djallon.

Em Futa-Djallon os Fulbe foram absorvidos pela sociedade de agricultores ali existente - os Djallonke. Durante o séc. XVII mais grupos Fulbe, com forte ligação com o islamismo chegaram a região e rapidamente se organizaram em um estado teocrático sob a direção do líder religioso Karamoko Alfa. Durante o séc. XIX século um *jihad* foi instigado contra os não-crentes da área até que a área inteira estava sob o controle islâmico. O estado novo foi dividido em nove províncias com uma capital em Timbo.

Os Fulbe têm um senso refinado de beleza. Os homens usam túnicas longas brancas ou azuis, bordadas ao redor dos punhos e do pescoço. As mulheres usam lenços e mantôs de algodão bem coloridos, freqüentemente decorados com padrões bem sofisticados. As mulheres casadas usam brincos múltiplos e braceletes; as mulheres mais jovens revestem os olhos com "*kohl*". As meninas e mulheres de todas as idades trançam seus cabelos e pintam desenhos vermelhos delicados nas mãos e pés com henna. Entre alguns grupos, as faces das mulheres são cortadas para formar cicatrizes decorativas.

A beleza também é expressada graça natural da vida diária. Os meninos aprendem a conduzir o gado desde cedo, aprendendo assim a fazerem movimentos com gestos lentos, suaves e a falarem em vozes tranqüilas para não agitar ou assustar o rebanho. As meninas executam tarefas domésticas que lhes exigem o transporte cargas pesadas de água e lenha na cabeça - feitos de força que requer movimento equilibrado, equilíbrio.

Em geral, homens e mulheres vivem separados . Eles comem, trabalham, e rezam separadamente, e tem papéis claramente definidos e exclusivos tanto em casa como publicamente. Fora da casa, marido e mulher não interagem e mantêm uma distância apropriada de um do outro. Os dois podem morar em aldeias diferentes durante longos períodos.

2.8.7. Ghana

O reino de Ghana, conhecido em seu tempo, como o “País de Ouro” é considerado o primeiro estado negro-africano de significativa riqueza e esplendor estabelecido na região ocidental do Sudão.

As primeiras notícias sobre este reino são dadas por textos árabes, do séc. VIII, que falam de um rico Estado do Sudão Ocidental.

De acordo com Maestri[8], este reino

> ... aparece registrado nos manuscritos árabes, repentinamente, quase como que surgido do nada, como se tivesse nascido de um passe de mágica neste continente, para muitos, ainda misterioso.

A origem de Ghana assentou-se nas condições geográficas, ecológicas, sociais, econômicas e históricas particulares do Sudão Ocidental. A ocupação gradativa destas regiões favoráveis ao homem permitiu um acelerado crescimento demográfico e a implantação de importantes comunidades de agricultores e pastores. A esta realidade, comum a quase toda faixa sudanesa, juntava-se a grande concentração de campos auríferos nestes territórios ou em regiões mais meridionais.

Ghana – o “País do Ouro” – teve uma formação social tributária originada a partir de localização geográfica privilegiada, ou seja, o controle de importantes rotas comerciais do Sudão Ocidental. Sua aristocracia apropriava-se dos tributos pagos pelos comerciantes e rendas tradicionais devidas pelas comunidades agrárias e artesãs. A origem do reino deveu-se possivelmente, a um fato de guerra. O chefe do reino portava o título de *ghana*, ou seja, senhor da guerra. Sua força e prestígios iniciais seriam devidos ao fato de que ele desempenhava também o papel de *mestre do ouro*. Como dignatário responsável pela repartição clânica periódica dos terrenos auríferos, recebia tributos em metal precioso.

A capital e o reino teriam tomado o nome do título do senhor da pequena “*chefferie*” sudanesa.

A capital do reino era uma grande cidade com as casas reais e dos grandes dignatários habilidosamente construídas em pedras. As habitações populares, ao contrário, seriam cabanas

---

[8] Maestri, M. p. 15

de terra de **tetos redondos**, o que sugere desenvolvida desigualdade social. A aglomeração habitacional encontrava-se cercada de muralhas. Em uma floresta sagrada, perto da cidade, localizavam-se as residências dos sacerdotes e dos índios, as prisões e os túmulos reais.

A crise no reino de Ghana provavelmente se inicia com sua conquista em 1077, pelos *almorávidas* - dinastia que se origina com a expansão dos berberes das costas atlânticas da África. O reino sobrevive ao ataque berbere como tributário dos almorávidas, despido de seu antigo esplendor e com territórios reduzidos. Mais tarde, em pleno séc. XVI, vamos encontrá-lo decaído, como vassalo do império Mali, que ultrapassou o poder e riqueza que o reino *sarakolê* havia conhecido nos melhores tempos. Após a dissolução do reino de Ghana, surgiu na região uma série de pequenos Estados independentes *sarakolês* sob as ordens, segundo parece, dos antigos governadores provinciais.

2.8.8. Ioruba

As comunidades ioruba que se desenvolveram principalmente no sudoeste da atual Nigéria constituíram um dos grandes centros civilizatórios da Guiné e chegaram a influenciar outras civilizações da região, como o reino Benin. Esta irradiação não se restringiu apenas ao continente africano. Milhares de iorubas escravizados foram desembarcados nas costas brasileiras, fecundando a cultura e a história do nosso país.

São incertas a origem dos povos ioruba. Provavelmente vieram das diversas migrações das regiões entre o lago Tchad e o Níger. A tradição oral apresenta duas versões para a gêneses dos povos ioruba:

- ilé-ifé teria sido o próprio berço da humanidade. Todos os povos e reinos descenderiam do deus-rei Odudua, fundador da cidade sagrada.
- Odudua foi o condutor de uma migração vinda do leste.

Após a fundação da cidade sagrada, os iorubas ter-se-iam espalhado pela região. Acredita-se que as comunidades iorubas tenham tomado forma no final do primeiro milênio de nossa era.

O apogeu da civilização ioruba parece iniciar-se nos primórdios do séc. XIII, época em que se estrutura a importante tradição artística ioruba e possível época da fundação da cidade de Oio, sua capital política.

A sociedade ioruba articulava-se em torno de cidades defendidas por possantes muralhas, onde habitavam os artífices, os camponeses e a aristocracia dominante. As cidades eram relativamente independentes do poder central. O chefe de uma cidade ioruba – o balé – tinha sua nomeação ratificada pelo senhor do reino e pela autoridade religiosa máxima. Compartilhava o poder com uma assembléia de notáveis que era, na realidade, a detentora da autoridade. O guarda das muralhas (em geral, um mágico – o babalô) recolhia os impostos devidos pelos comerciantes, artesãos e camponeses que vinham mercadejar os produtos no espaço urbano. Uma grande aristocracia improdutiva controlava armas, o poder político, o comércio local, nacional e internacional. Quando se estruturou o tráfego negreiro através do atlântico, ela voltou-se com energia para a caça e venda de homens.

2.8.9. Lesotho

Os Sotho (ou Basotho – plural bantu de sotho) estabelecidos no atual Transvaal desde o século XVI estavam entre os povos que se viram obrigados a migrar da região da África Austral, a fim de resistirem à pressão dos zulus em começos do séc. XIX.

Um grupo de Sotho rumou para o norte até o Zambebe, enquanto outro, buscou refúgio no maciço de Drakensberg mas tarde Basutolândia, agora Lesotho.

2.8.10. Lunda

Na segunda metade do séc. XVI chefes bungus, com base a oeste dos Lubas ligaram-se por um juramento de amizade e elegeram um entre eles *mwata* Mwaku. O filho deste último rei, Kondé, teve dois filhos e uma filha, Luedji, que foi escolhida como herdeira. Luedji recebeu o bracelete de ferro real e o título de swana mulunda (mãe do povo Lunda). Em seguida, casou-se com o príncipe luba Ilnga Shibinda, que estendeu para noroeste o poder lunda. Foi seu neto e sucessor, *mwata* Yamvo (1660-1675), que estabeleceu realmente o conjunto lunda como uma das potências da África Central, a tal ponto que o seu nome passou a seus sucessores como título dinástico. Ele expande seus domínios e para tornar mais eficaz a administração, nomeia governadores de província que são quase autônomos mas devem pagar tributo ao rei. O rei, cuja pessoa é sagrada, é eleito por quatro dignatários, que elegem também, entre as suas parentas, a “mãe do rei”. A sucessão é patrilinear.

O mito político lunda dizia que cada rei se identifica com seu predecessor. Daí a constituição de uma gingantesca família ligada ao primeiro rei, sendo todos aqueles que , de uma maneira ou de outra, estavam aliados ao soberano reinante equiparados ao parentesco real. Este sistema era ajustável a qualquer estrutura preexistente e assegurava ao mesmo tempo a eficiência interna da organização lunda e sua irradiação para o exterior.

Os lundas praticavam o mesmo sistema de parentesco perpétuo, este sistema complexo segundo o qual o sucessor “se convertia” no predecessor, recuperava seu nome, suas relações de parentesco seus cargos e prerrogativas. O sistema negava o passar do tempo para assegurar uma coerência sem falha e uma continuidade assegurada a toda ordem social.

Este sistema permitia perpetuar assim relações de poder, nascidas de alianças matrimoniais, de conquistas, de integrações e de acordos "fraternais" mútuos entre chefes. Depois de 1500 se converteu em uma ferramenta poderosa para forjar um autêntico império, agrupamento de vários reinos sob a autoridade dos lundas depois de 1500.

No séc. XVIII o reino opera uma ampliação de largo alcance e o general Kanyembo ocupa e organiza o país. Seu filho Nganda Iluda recebe em 1796 o pioneiro português Caetano Pereira, estabelecido ao norte de Tete. Por intermédio dos Bisas do lago Bangweulu e dos Yaos do lago Niassa, o cazembe entra em relações comerciais com a costa do oceano índico. Este proconsul lunda continuava, no entanto, a considerar-se filho de mwata Yamvo, a quem pagava tributo em sal , artigos exóticos da costa de Zanzibar, mas, sobretudo, em escravos que eram vendidos aos portugueses de Angola. Lunda recebia assim mercadorias portuguesas dos dois oceanos e, em troca, expedia escravos de estados ao sul da Tanzânia, na costa oriental da África. Sua capital é Maputo e a língua oficial o português. A agricultura é sua principal atividade econômica sendo produtor de castanha de caju além de cultivar mandioca, côco, cana-de-açúcar e algodão. O desenvolvimento industrial acontece nas áreas de processamento de alimentos e de refinamento de petróleo. Há grandes recursos minerais como carvão, ferro, bauxita, urânio, cobre e níquel. Tornou-se independente em 1975, após onze anos de luta armada.

2.8.11. Macondes

Os Macondes ou Makondes são povos de língua bantu que vivem no nordeste de Moçambique e sudeste da Tanzânia. As clãs dos Macondes moravam originalmente em Moçambique mas devido a questões econômicas – falta de terra e alimento – alguns deles mudaram para Tanzânia no séc. XX.

A importância social e econômica das mulheres é ainda grande na sociedade Maconde. As mulheres são consideradas as criadoras das clãs embora não se possa falar em uma sociedade totalmente matriarcal.

Os Macondes acreditavam que fazer cicatrizes no corpo os impedia de serem levados como escravos. Apesar desta prática não mais existir, muitas mulheres cortam seu rosto e corpo e esfregam cinzas nos cortes para formarem padrões geométricos que são também encontradas nas esculturas.

Os Macondes são destemidos, artistas e fortemente seguidores de ritos de iniciação. Nestes, tem sido hábito o uso de máscaras "*mapico*[9]" que é também a principal dança dos macondes. Outra forma de expressão cultural é a tatuagem e os dentes afiados, com fins estéticos ou de identificação além das esculturas em madeira e marfim.

Os Macondes mantêm sua religião tradicional apesar de séculos de influência pelos comerciantes islâmicos. Suas práticas estão centradas em torno da celebração e recordação dos antepassados.

2.8.12. Mali

Segundo a tradição, o reino de Mali nasceu no alto Niger (fronteira da Guiné com o atual Mali por volta de 1213, no seio do povo malinquê[10], sob a chefia de Allakoi Keita. Por essa época, um chefe fugido de Ghana após a conquista almorávida, fundou o reino Sosso. Seu filho Sumanguru conquistou o reino de Mali, após massacrar a família real Keita, da qual só sobreviveu o filho mais novo, de sete anos, Sundiata, que era paralítico. Exilado em Ghana, onde, conforme a lenda, se curou graças a seu grande poder mágico, Sundiata Keita, ou Mari Data (o leão de Mali), derrotou Sumanguru em 1235.

Após conquistar os povos vizinhos, Sundiata tornou-se chefe de um vasto império que se estendia do Senegal ao Niger e do sul da Mauritânia à zona florestal costeira, englobando três grandes regiões auríferas sudanesas da época.

Sundiata foi um grande conquistador e um cuidadoso administrador que fez reinar a paz no seu império, dividido em províncias governadas por *farin* (representantes). A sociedade mandinga era formada por homens livres. Artesãos e escravos, distribuídos em 13 clãs. Juntamente com a agricultura, tomaram vulto o cultivo e a tecelagem do algodão.

2.9. Índice de Figuras

[9] *Mapico*: nome de uma máscara, de uma dança, motivo de histórias secretas, de terror entre mulheres e crianças macondes. Também é o nome de uma dança cheia de força e expressividade, executada nas principais festas e cerimônias da aldeia.

[10] *Malinké* ou mandinga é uma palavra composta de *ma*, 'mãe' e *ding*, 'criança'

2.10. Bibliografia

ALBERT, B. **Yanomami.** Disponível em: <http://www.socioambiental.org/website/pib/epi/yanomami/yanomami/shtm> Acesso em: 13 dez. 2002.

AMMA, S. T. A. **Geometry in Ancient and Medieval Índia.** 1a. ed. Índia: Motilal Banarsidass, 1979. 280 p.

ANDRADE, L. **Asurini.** Disponível em: <http://www.socioambiental.org/website/pib/epi/asuri_to/ideo.shtm> Acesso em: 13 dez. 2002.

Aweti. Disponível em: <http://www.aup.org/lista/pr9017.htm> Acesso em: 13 dez. 2002.

BOS, H. J. M.; MEHRTENS, H. The Interactions of Mathematics and Society in History some Explorations Remarks. **Historia Mathematica**, v. 4, p. 7-30, 1977.

BUNT, L. N. H.; JONES, P. S.; BEDIENT, J. D. **The Historical Roots of Elementary Mathematics.** 1a. ed. Dover. New York: Dover Publications Inc., 1988. 299 p.

BURNS, E. M. **História da Civilização Ocidental.** Tradução: D. Garschagen. 40a. ed. São Paulo: Globo, 2000. 401 p. v. 1.

Bushongo. Disponível em: <http://www.encyclopedia.com/html/section/africana_the congoregion.asp> Acesso em: 14 jun. 2003.

CIVITA, R. (Ed). **Almanaque Abril 2003. A Enciclopédia da Atualidade.** São Paulo: Abril S. A., 2003. 1 CD-ROM.

COSTA, M. H. F.; MALHAMO, H. B. Habitação Indígena Brasileira. In: RIBEIRO, D. **SUMMA Etnológica Brasileira 2. Tecnologia Indígena..** 2a. ed. Petrópolis: Vozes, 1987. 1. p. 27-94.

Enciclopédia Mirador Internacional. São Paulo: Encyclopaedia Britannica do Brasil Publicações Ltda, 1976. v. 13.

Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo Americana. Madrid: Espasa-Calpe S. A.v. 23.

Enciclopédia Universal Ilustrada Europeo Americana Tomo II – Apêndice. Madrid: Espasa-Calpe S. A.

FRIBERG, J. Methods and Traditions of Babylonian Mathematics. **Historia Mathematica**, v. 8, p. 277-318, 1981.

GALLOIS, D. T. **Waiapi.** Disponível em: <**http://www.socioambiental.org/website/pib/ epi/waiapi.waiapi.shtm**> Acesso em: 13 dez. 2002.

GERDES, P. **Geometria Sona. Reflexões sobre uma tradição de desenho em povos da África ao sul do Equador.** 1a. ed. Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1993. 201 p. v. 1.

GERDES, P. **Sobre o Despertar do Pensamento Geométrico.** 1986. Tese de Doutorado - Instituto Superior Pedagógico "Karl Friedrich Wilhelm Wander" de Dresden (RDA).

GIANNINI, I. V. **Xikrin.** Disponível em: <**http://www.socioambiental.org/website/pib/ xikrin/xikrin.htm**> Acesso em: 13 dez. 2002.

GILLINGS, R J. **Mathematics in the time of the Pharaohs.** New York: Dover Publications Inc., 1972. 288 p.

HAYWOOD, J. **Atlas Histórico del Mundo**: Könemann240 p.

HERÔDOTOS. **História.** Tradução: Mario da Gama Kury. 2a. ed. Brasília: Universidade de Brasília, 1988. 613 p. (Biblioteca Clássica UnB.) v. 8.

IREM DE MONTPELLIER. **L'Espirit de Geometrie - 1a. parte** 1a. ed. Montpellier: Université Montpellier II. 89 p.

JOSEPH, G. G. **The Crest of The Peacock.** 2a. ed. USA: Princeton University Press, 2000. 455 p.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics. An Introduction.** 2a. ed. USA: Addison-Wesley Educational Publishers Inc., 1998. 856 p.

KATZ, V. J. Egyptian Mathematics. In: HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1996, Braga. **História e Educação Matemática. Proceedings. Actes. Actas. v. 1.** Braga, 1996. p. 45-53.

KI-ZERBO, J. **História da África Negra. v. I.** Tradução: Américo de Carvalho.Portugal: Publicações Europa-América. 452 p. (Biblioteca Universitaria.) v. 14.

KI-ZERBO, J. **História da África Ocidental. Vol. II** Tradução: Américo de Carvalho. Portugal: Publicações Europa-América464 p. (Biblioteca Universitária.) v. 15.

KOOGAN, A.; HOUAISS, A. **Enciclopédia e Dicionário Ilustrado.** Rio de Janeiro: Edições Delta, 1996. 1635 p.

LANGDON, J. A Cultura Siona e a Experiência Alucinógena. In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 1a. ed. São Paulo: Studio Nobel/EDUSP, 1992. p. 67-87.

MAESTRI. M. **História da África Negra Pré-Colonial.** Porto Alegre: Mercado Aberto, 1988. 120 p. (Revisão.) v. 31.

MARTZLOFF, J. C.; **A History of Chinese Mathematics.** Tradução: S. Wilson. 1a. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1997. 484 p.

MELATTI, J. C. **Marubo.** Disponível em: <**http://www.socioambiental.org/website/pib/marubo/marubo.htm**> Acesso em: 13 dez. 2002.

MELATTI, J. C. **Timbira.** Disponível em: <**http://www.pegue.com/indio/timbira.htm**> Acesso em: 13 dez. 2002.

MULLER, R. P.; SILVA, F. A. **Asurini do Xingu.** Disponível em: <**http://www.socioambiental.org/website/pib/epi/asurini/asurini.shtm**> Acesso em: 13 dez. 2002.

MÜLLER, R. P. Mensagens Visuais na Ornamentação Corporal Xavante. In: LUX, V. (Org.) **Grafismo Indígena.** 2a. ed. São Paulo: Studio Nobel: EDUSP, 2000. p. 133-142.

MULLER, R. P. Tayngana, A Noção de Representação na Arte Gráfica Asurini do Xingu. In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 1a. ed. São Paulo: Studio Nobel: EDUSP, 1992. p. 231-248.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Pythagoras's Theorem in Babylonian Mathematics.** Disponível em: <**www-history.mcs.st-and.ac.uk/~h.../HistTopics/Babylonian_Pythagoras.html**> Acesso em: 21 abr. 2001.

OLIVER, R.; FAGE, J. D. **Breve História da África.** Tradução: Artur Mourão. 1a. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1980. 342 p. (Terceiro Mundo.)

Os Fulbe. Disponível em: <**http://archnet.org/library/dictionary/entry.tcl?entry_id= DIA0111**> Acesso em: 14 jun. 2003.

PECHINCHA, M. T. S. **Karajá.** Disponível em: <**http://www.socioambiental.org/ website/povind/index.html**> Acesso em: 13 dez. 2002.

RIBEIRO, D. (Ed); RIBEIRO, B. G. (Coord.). **SUMA Etnológica Brasileira 2. Tecnologia Indígena.** 2a. ed. Petrópolis: Vozes/FINEP, 1987. 448 p.

ROBERTS, J. M.; **O Livro de Ouro da História do Mundo: Da Pré-História à Idade Contemporânea.** Tradução: L. Alves; A. Rabello. 1a. ed. Rio de Janeiro: Ediouro, 2000. 816 p.

ROBINS, G.; SHUTE C. **The Rhind Mathematical Papyrus. An Ancient Egyptian Text.** 1a. ed. New York: Dover Publications Inc., 1987. 60 p.

SÁ, C. Observações sobre a Habitação em Três Grupos Indígenas Brasileiros In: NOVAES, S, C. (Org.) **Habitações Indígenas.** São Paulo: Nobel: EDUSP, 1983. p. 103-145.

SCANDIUZZI, P. P. **Educação Indígena x Educação Escolar Indígena: uma relação etnocida em uma pesquisa etnomatemática.** 1999. 206 p. Tese (Doutorado). Marília.

SEIDENBERG, A. On the Volume of a Sphere **Archive for History of Exact Sciences**, Berlin, v. 39, n. 2, p. 97-119, Dezembro 1988.

SEIDENBERG, A. The Ritual Origin of Geometry. **Archieve for History of Exact Sciences.**, p. 488-527, 1963.

SENRA, K. **Kaiabi.** Disponível em: <**http://www.socioambiental.org/website/pib/epi/ kaiabi/kaiabi.shtm**> Acesso em: 13 dez. 2002.

SILVA, A. L. Xavante: Casa - Aldeia - Chão - Terra – Vida. In: NOVAES, S. C. **Habitações Indígenas.** São Paulo: Nobel/EDUSP, 1983. p. 33-56.

SIQUEIRA JR., J. G. A Iconografia Kadiweu. In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 1a. ed. São Paulo: Studio Nobel/EDUSP, 1992. p. 265-277.

SMITH, D. E. China e Índia In: **History of Mathematics. General Survey of the History of Elementary Mathematics.** New York: Dover Publications Inc., 1958. p. 96-99.

The Fulbe. Disponível em: <http://home.earthlink.net/~magnetic_north/Fulbe.htm> Acesso em: 14 jun. 2003.

TORAL, A. A. Pintura Corporal Karajá Contemporânea. In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 1a. ed. São Paulo: Studio Nobel: EDUSP, 1992. p. 191-208.

van VELTHEM, L. H. Onde os Wayana Penduram suas Redes. In: NOVAES, S. C. **Habitações Indígenas.** São Paulo: Nobel: EDUSP, 1983. p. 169-193.

van VELTHEM, L. H. Das Cobras e Lagartas: a Iconografia Wayana. In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 1a. ed. São Paulo: Studio Nobel: EDUSP, 1992. p. 53-65.

VERSWIJVER, G. **Kayapo.** Disponível em: <http://www.socioambiental.org/website/pib/epi/kayapo/kaiapo.shtm> Acesso em: 13 dez. 2002.

VIDAL, L. O Espaço Habitado entre os Kayapó-Xikrin (Jê) e os Parakanã (Tupi), do Médio Tocantins, Pará. In: NOVAES, S. C. (Org.) **Habitações Indígenas.** São Paulo: Nobel: EDUSP, 1983. p. 77-102.

VIDAL, L. A Pintura Corporal e a arte Gráfica entre os Kayapó-Xikrin do Catete. In: ____ **Grafismo Indígena.** 1a. ed. São Paulo: Studio Nobel: EDUSP, 1992. p. 143-189.

WUSSING, H. **Lecciones de Historia de las Matemáticas.** Madrid: Siglo XX de España Editores S. A., 1998. 345 p.

YAN, L.; SHÍRÀN, D. **Chinese Mathematics. A Concise History.** Tradução J. N. Crossley; A. W.-C Lun. New York: Oxford Science Publications, 1987. 290 p.

3. O Círculo e o Quadrado

3.1. Introdução

O círculo e o quadrado são duas formas geométricas que aparecem nas civilizações indiana, chinesa, babilônica, egípcia, africana e entre os indígenas brasileiros. Estas formas estão associadas a rituais religiosos, astronomia, arquitetura ou tecelagem e muito conhecimento geométrico pode ser identificado nestas civilizações a partir da análise de como essas formas foram incorporadas à cultura de cada um desses povos.

Pude identificar, durante minha investigação, métodos distintos de construção do quadrado e do cálculo da área do círculo em algumas dessas civilizações que sequer são citados em boa parte dos textos de História da Matemática usados no ensino de graduação. Soluções aproximadas para o problema da quadratura do círculo, um dos problemas clássicos da geometria grega, também aparecem no estudo de algumas dessas civilizações.

Acredito que a incorporação e a discussão deste conhecimento nos cursos de geometria permitem uma melhor reflexão sobre a natureza do conhecimento geométrico estudado no ensino fundamental e médio e na formação de professores.

O círculo talvez seja o símbolo mais antigo desenhado pela raça humana e, desde o início, exerceu um papel mais importante do que o simplesmente decorativo: ele emerge como uma roda, usado no transporte, agricultura e cerâmica; é utilizado como símbolo do divino – nas culturas orientais o retângulo representa o mundo material enquanto o círculo representa a forma divina comprometida com a unidade. Simples de ser executado, é uma forma cotidiana encontrada na natureza, vista nos céus como os discos do sol e da lua, presente na forma das plantas, dos animais e nas estruturas geológicas naturais.[1]

Quanto à discussão da época e de como o círculo e o quadrado surgiram, Seidenberg afirma que estas formas remontam à pré-história; surgiram de atividades rituais; são figuras sagradas e duais e foram estudadas pelos sacerdotes pela mesma razão que estudaram as estrelas: para conhecer melhor os deuses. Por outro lado, Gerdes afirma que a primeira noção de retângulo pode ter surgido através da confecção de esteiras e a formação do conceito de círculo a partir da fabricação de formas cada vez mais adequadas a suas necessidades ou observadas na natureza.[2]

A morfologia das aldeias dos **indígenas brasileiros** é dividida, conforme a planta da situação em: circulares, retangulares e lineares. A morfologia das casas em planta baixa

---

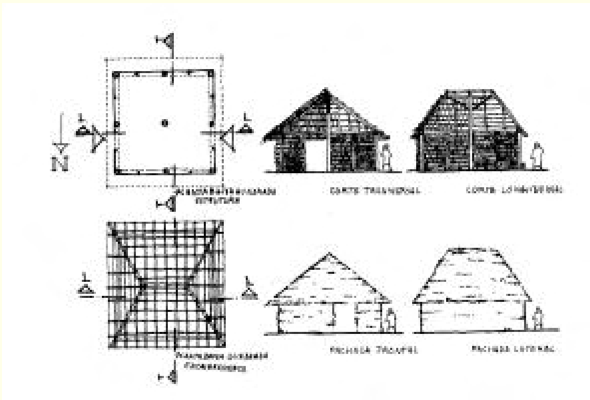
[1] Pennick, N. p. 16, Baron, M. E.; Bos, H. J. p.11, Dahlke, R. p. 80 e p. 141

[2] Seidenberg, A. p.523 ; Gerdes, P. p. 35 e p. 58

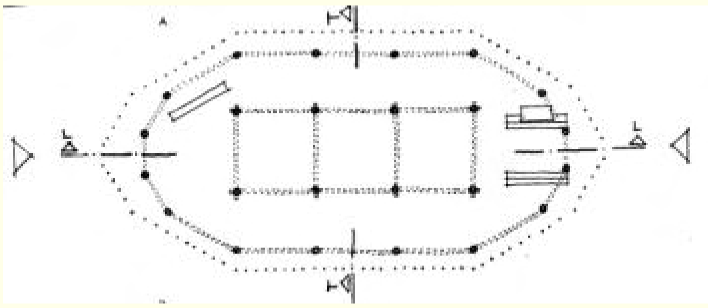
circular com cobertura cônica ou cúpula; planta baixa elíptica; planta baixa retangular (subdividida em quadrados).

Os exemplos da figura 1.1 mostram algumas plantas baixas, feitas em escala, de casas indígenas. Podemos identificar na planta baixa da habitação Karajá um quadrado e na da casa-aldeia Marubo um triplo quadrado. No esboço da casa Xavante percebe-se que sua planta baixa é um círculo.

(a) Casa Xavante



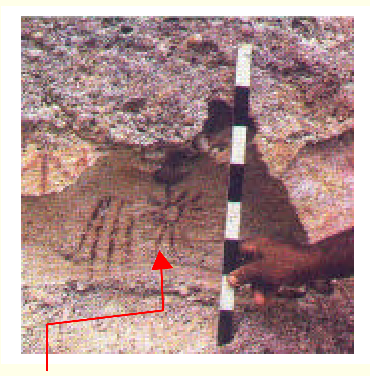
(b) Habitação Karajá



(c) Planta baixa: Casa-aldeia Marubo

Figura 1.1

Estudos sobre pinturas rupestres astronômicas mostram o círculo como uma figura marcante na representação da astronomia dos indígenas[3].[Figura 1.2].



Sol

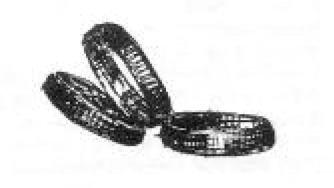
Figura 1.2

[3] Costa, M. H. F.; Malhamo, H. B. p. 29 e 30

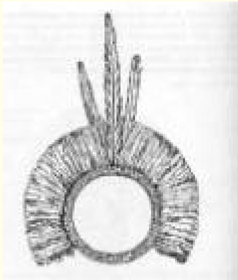
Encontramos também, formas retangulares quadradas e circulares em diversos artefatos dos indígenas brasileiros, como por exemplo:

- Nos objetos de uso pessoal como os anéis de cauda de camaleão ou de lagartixa [índios Karajá]; os anéis de coco tucum [índios Suruí de Rondônia]; discos auriculares de pau-balsa [índios Timbira]; coroa radial [índios do Rio Branco]; coroa vertical [índios Javaé]; abanos e máscaras [Figura 1.3].

(a) Anéis de cauda de camaleão e de lagartixa teiu

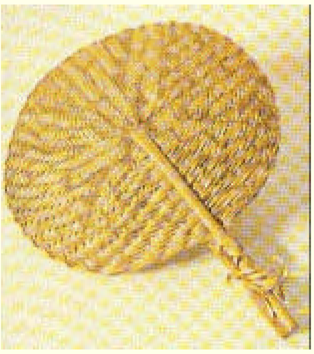


(b) Anéis de coco tucum

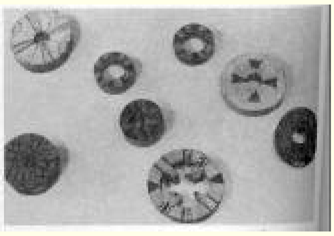


(c) Coroa radial

(d) Coroa vertical



(e) Abano



(f) Discos auriculares

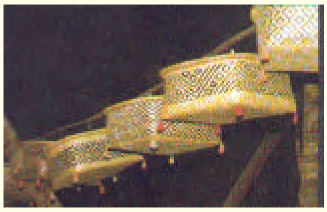
(g) Máscaras

Figura 1.3

- Nas peças de cestaria [Figura 1.4].

(a)

(b)



(c) Base quadrada

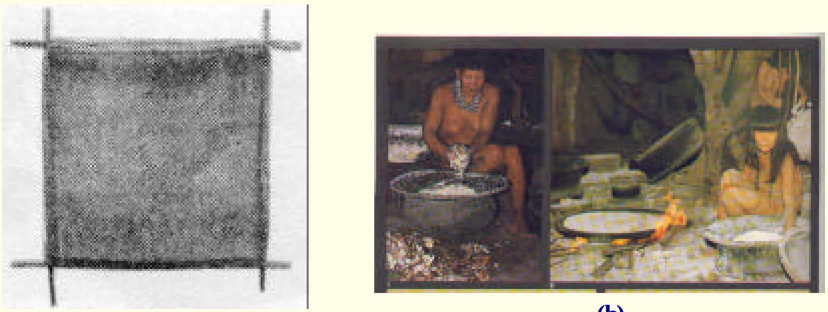
Figura 1.4

- Na roda de teto *maruana* representando lagartas sobrenaturais [Figura 1.5].

(a) (b)

Figura 1.5

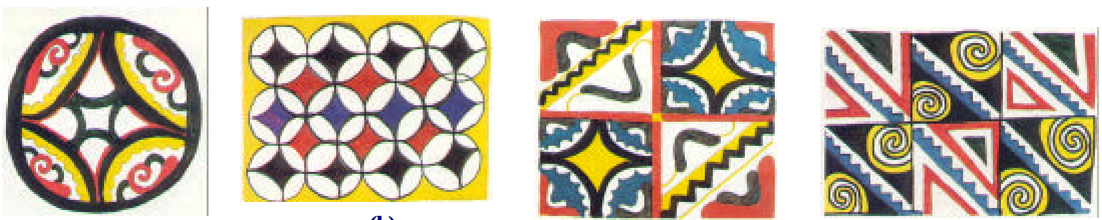
- Nos utensílios domésticos utilizados no trabalho com a mandioca [Figura 1.6]



(a) (b)

Figura 1.6

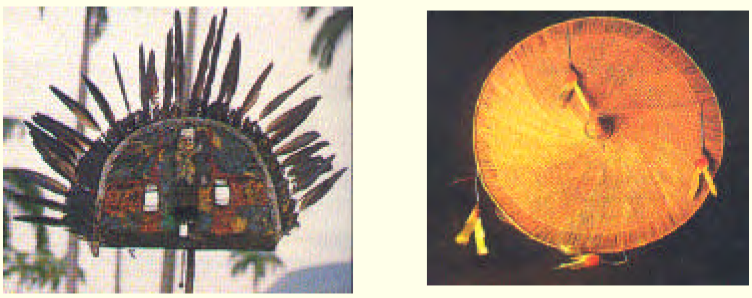
- Nos desenhos para decoração de cerâmicas, couro, potes, pratos etc [Figura 1.7].



(a) (b) (c) (d)

Figura 1.7

- Nos objetos rituais [Figura 1.8].



(a) (b)

Figura 1.8

Os antigos indianos associavam os deuses a quadrados e os humanos a retângulos. A associação de deuses gerava um novo deus e isso os levou a buscarem a solução para resolver vários problemas geométricos. Um dos mais famosos e complexos altares indianos da época védica é o Altar do Falcão. Sua estrutura básica é formada por 7 quadrados [Figura 1.9].

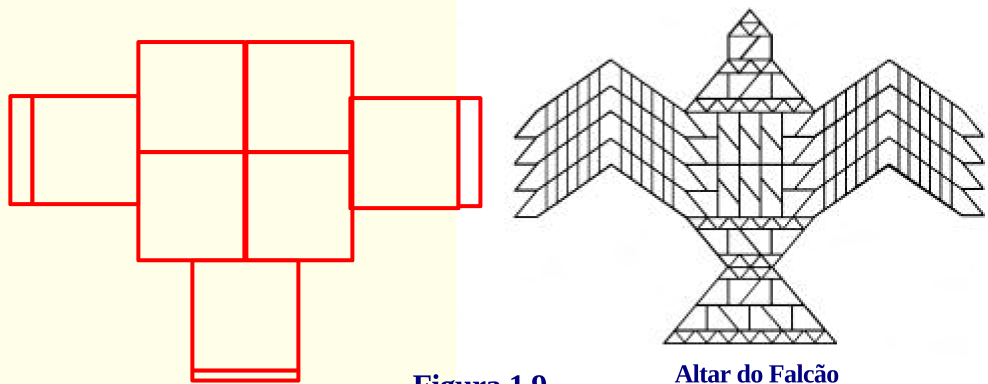
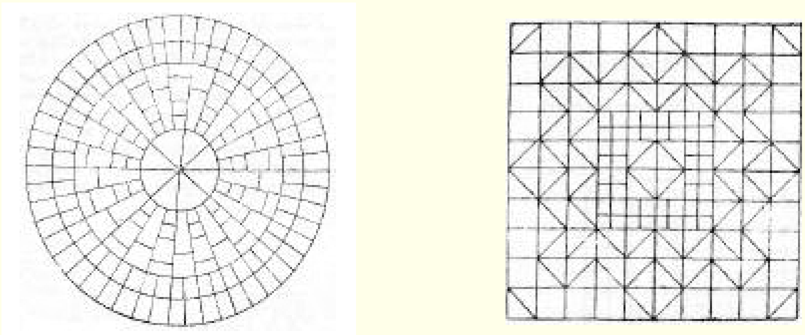


Figura 1.9 **Altar do Falcão**

Além disso, alguns altares indianos são circulares como o altar Sararathacakracit na forma de uma roda com raios e outros quadrados como os diversos níveis do altar *Samuhaya*.[4] [Figura 1.10]



(a) **(b)**

Figura 1.10

A primeira pirâmide **egípcia**, o túmulo de Djoser em Saqqara (c. 2750 a.C.) foi desenhada por Imhotep, um homem de gênio tão excepcional que após sua morte, foi elevado à condição de deus que fundamentou a medicina e arquitetura. A Pirâmide Escada [Figura. 1.12] tinha uma planta baixa quadrada e era mais uma "montanha sagrada" em forma de escada que uma pirâmide de lados nivelados.[5]

---

[4] Sarasvati, S. S. P. p. 141 e 193

[5] Pennick, N. p. 43. Gerdes, P. p. 129

Figura 1.11

A maior pirâmide de Gizeh, [Figura. 1.12] de 147 m de altura e erigida no Egito antigo durante o reinado de Quéops [c. 2545 a.C. – 2520 a.C.] considerada na Antigüidade, uma das sete maravilhas do mundo, tinha base quadrada.[6]

Figura 1.12

A forma circular também é encontrada na carruagem egípcia[7] do século XV a.C.

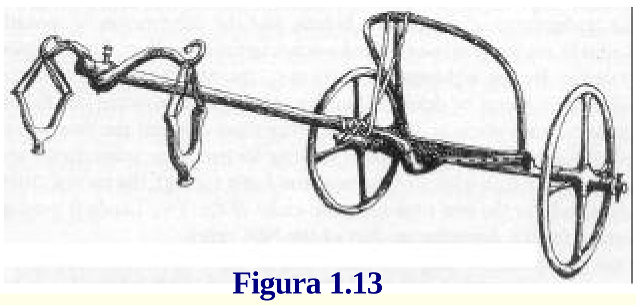


Figura 1.13

- Nos pratos da balança de madeira egípcia[8] com pesos de bronze na forma de animais e pássaros de cerca de 1350 a.C. [Figura 1.14]

[6] Gerdes, P. p. 128
[7] Childe, V. G. p. 726
[8] Skinner, F. G. p. 783

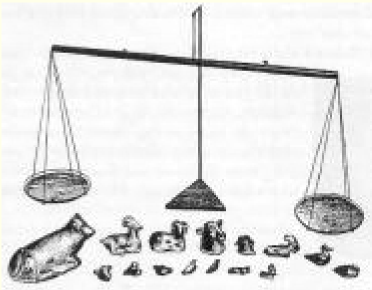


Figura 1.14

A tradição da edificação de montanhas sagradas artificiais encimadas por templos – os zigurates – têm raízes na **Babilônia**.

Os zigurates – obras mais representativas da construção na Mesopotâmia – são templos em forma de torre; são da época dos primeiros povos sumérios e sua forma foi mantida sem alterações pelos assírios. Na realidade, os zigurates (pirâmides com degraus e rampas laterais coroadas por um templo), eram edificações superpostas que formavam um tipo de torre de faces escalonadas, dividida em várias câmaras. Havia na Babilônia um zigurate [Figura. 1.15] cujas dimensões e cuja geometria têm sido reconstruídas com o auxílio de evidências documentais e arqueológicas.

Zigurate significa "pico dos deuses": é uma montanha sagrada, desenhada como reprodução miniaturizada do arranjo do universo e era orientada para as quatro direções cardeais.

A tábula cuneiforme conhecida como Tábula Smith afirma que cada terraço do zigurate da Babilônia possuía sua própria medida simbólica. O terceiro estágio, por exemplo, era um quadrado com lados de seis côvados.[9]

Figura 1.15

[9] Pennick, N. p. 53

Na Mesopotâmia, o círculo é encontrado na construção dos carros de boi[10], como pode ser visto na Figura 1.16.

c. 800 a.C.

Figura 1.16

E no objeto feito em prata[11] de antes de 2000 a.C. [Figura 1.17]

Figura 1.17

Na **China** círculos podem ser encontrados**,** por exemplo, no modelo de recipiente para vinho[12] da dinastia Shang-Yin [c. 1766-1122 a. C.]. [Figura 1.18]

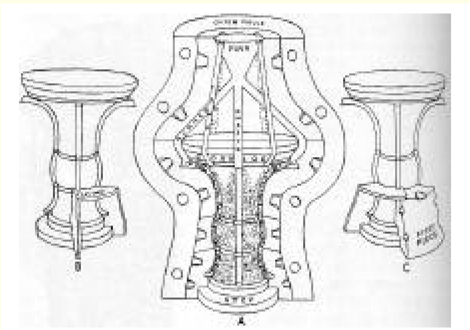
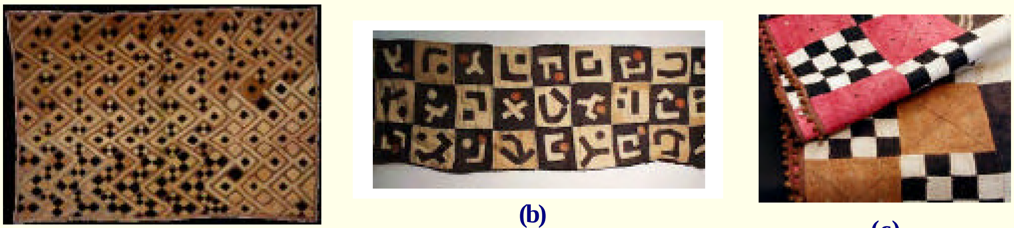


Figura 1.18

[10] Childe, V. G. p. 54
[11] Maryon, H.; Plenderleith, H. J. p. 626
[12] Maryon, H.; Plenderleith, H. J. p. 628

Entre os **povos africanos** círculos e retângulos são encontrados em vários dos seus artefatos e objetos de uso pessoal, como por exemplo:

- Na decoração de tecidos Bakuba, Bushngo e Congo[Figura 1.19]



(a) (b) (c)

Figura 1.19

- No chapéu Bafut e Congo [Figura 1.20]

(a) (b) (c)

Figura 1.20

- No colar de Ghana

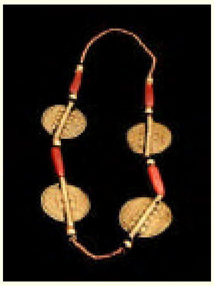


Figura 1.21

- E nos vasilhames de Benin e Mali [Figura 1.22].

(a) (b)

Figura 1.22

3.2. Quadrados, retângulos e círculos

Vimos no início deste capítulo que um dos altares públicos cuja construção está descrita nos *Sulbasutras* é o altar do falcão. Sua forma básica tinha uma área de $7\frac{1}{2}$ *purushas*[13] quadradas; o corpo do altar era um quadrado 2 x 2 (4 *purushas* quadradas), as asas e a cauda um quadrado de uma *purusha* cada. Para que a imagem pudesse estar bem próxima da forma real de um pássaro, asas e caudas foram alongadas – a primeira em um quinto de uma *purusha* e a segunda em um décimo [Figura 2.1]

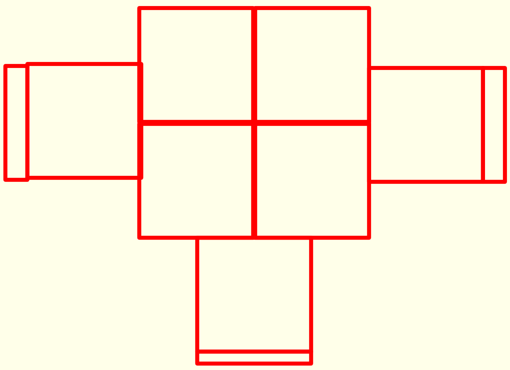


Figura 2.1

Este era o tamanho e a forma do altar do falcão em sua primeira camada.

Na segunda construção, uma *purusha* quadrada era acrescentada, isto é, a área do segundo altar seria então de $8\frac{1}{2}$ *purushas* quadradas; na próxima construção, outra *purusha* quadrada era acrescentada e assim por diante, até chegar a uma área de $101\frac{1}{2}$ *purushas* quadradas. É claro que o sacrificador está subindo uma escada e seu grau de sacrifício fica determinado ou determina a área. É importante observar que na construção dos altares maiores $(8\frac{1}{2},\ 9\frac{1}{2},\ \dots,\ \text{etc})$ a mesma forma do altar básico é exigida.

Temos aqui o problema geométrico de construir figuras semelhante à da figura 2.1 de áreas $8\frac{1}{2},\ 9\frac{1}{2}$, ..., etc.

A dimensão histórica permite perceber alguns conhecimentos matemáticos como resultado da necessidade oriunda das atividades de trabalho de certos grupos de profissionais. Assim uma forma social da matemática surge, a saber, matemática como conhecimento básico de

[13] Uma *purusha* equivale à altura de um homem com os braços esticados para cima. Sarasvati, S. S. P. p. 44

certas profissões ou trabalhos, como por exemplo, o trabalho dos subakaras[14] *indianos. Outro exemplo desta forma social de matemática é o conhecimento matemático desenvolvido pelos astrólogos-astrônomos da Antigüidade. Vemos assim um conhecimento matemático estritamente ligado às funções práticas como um meio de resolver problemas.*

De acordo com a descrição contida em Seidenberg[15], inicialmente eles acrescentavam uma unidade à área total dos sete quadrados sem o alongamento proporcional das asas e da cauda. Depois faziam esse alongamento de forma proporcional, i.e., um quinto em cada asa e um décimo na cauda.

Assim, o problema fica resolvido se soubermos como construir um quadrado de área igual a de um retângulo dado. No caso do altar de área $8\frac{1}{2}$, o retângulo teria dimensões 1 *purusha* por $1\frac{1}{7}$ de *purusha*.

Um método utilizado pelos indianos para

- Construir um quadrado de área igual a um retângulo

é encontrado no Baudhayana *Sulbasutra* e pode ser descrito como segue[16]:

- Considerar um retângulo ABCD dado. [Figura 2.2]

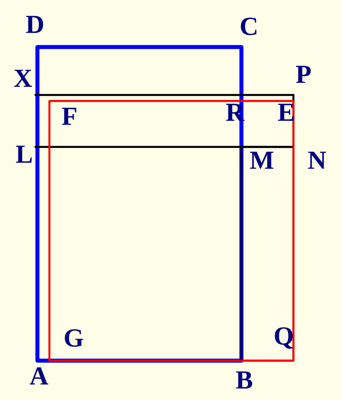


Figura 2.2

- Marcar L sobre AD, tal que AL = AB.
- Completar o quadrado ABML.
- Bissectar LD em X e divida o retângulo LMCD em dois retângulos iguais com a reta XY.

[14] Responsáveis pela construção dos altares.
[15] Seidenberg, A. p. 491
[16] O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. p. 2

- Mover o retângulo XYCD para a posição MBQN.
- Completar o quadrado AQPX.
- Girar PQ sobre Q até ele tocar BY em R.
- Desenhar RE paralela a YP e completar o quadrado QEFG.

O quadrado QEFG tem a mesma área do retângulo ABCD.

O Baudhayana *Sulbasutra* não oferece nenhuma prova deste resultado mas, é possível verificar a veracidade do método utilizando nossos conhecimentos de geometria plana.

No Apastamba *Sulbasutra* encontramos o seguinte método para resolver o mesmo problema[17]:

- Seja ABCD o retângulo dado. [Figura. 2.3]

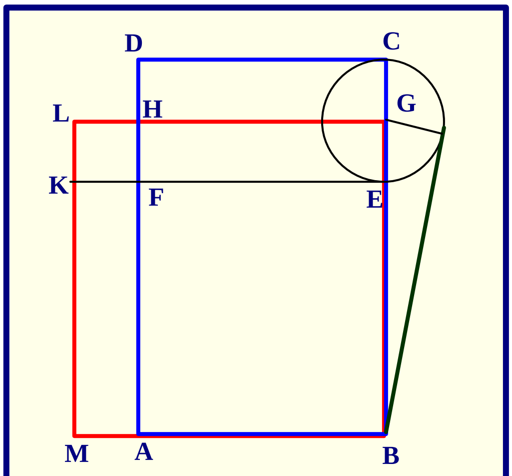


Figura 2.3

- Levantar os lados menores sobre os maiores de maneira que AF = AB = BE = CD
- Traçar HG mediatriz dos segmentos CE e DF.
- Prolongar EF até K, GH até L e AB até M, de modo que FK = HL = FH = AM
- Traçar o segmento ML.
- Construir um retângulo cuja diagonal é igual a LG e o lado menor igual a HF.
- Então, o lado maior desse retângulo é o lado do quadrado procurado.
- Um modo de construir o retângulo indicado no sexto item é traçando uma circunferência de centro G e raio HF e depois uma tangente a essa circunferência passando por B. Alguns resultados da geometria estudada no ensino fundamental e médio podem ser discutidos a partir da análise desse método.

[17] Matemáticas em Índia, p. 2

Um outro fato característico dos rituais indianos era a combinação de deuses em um único deus. Como na religião indiana um deus era representado por um quadrado, a combinação de deuses conduz ao problema de achar um quadrado, igual em área, à soma de dois quadrados ou mais quadrados dados.

No *Satapatha Brahma* (VI, 1, 1, 1-3) encontramos[18]:

No começo o Rishis [ar vital] criou sete pessoas separadas, que eram semelhantes a quadrados. .... Permita-nos fazer essas sete pessoas em uma Pessoa!, em seguida essas sete pessoas são compostas no altar do falcão.

Um método para resolver o problema de

- Construir um quadrado, igual em área, a dois quadrados desiguais.

aparece em muitos dos diferentes *Sulbasutras*:

- Sejam ABCD e PQRS dois quadrados dados. [Fig. 2.4]
- Marcar um ponto X sobre PQ tal que PX seja igual a AB.

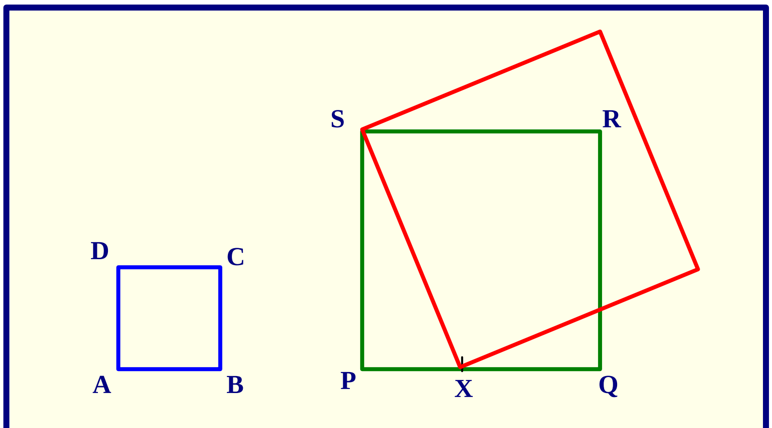


Figura 2.4

- Então o quadrado de lado SX tem área igual à soma das áreas dos quadrados ABCD e PQRS.

O fato de SX ser o lado do quadrado procurado é uma conseqüência imediata do Teorema de Pitágoras.

De fato, pelo teorema de Pitágoras,

$$PX^2 + PS^2 = SX^2$$

Mas,

$$AB^2 = PX^2$$

[18] Seidenberg, A. p. 492

Logo,

área (quadrado de lado SX) = $SX^2 = AB^2 + PS^2$ = área (PQRS) + área (ABCD).

Um sucesso notável das matemáticas védicas foi o descobrimento de um procedimento para calcular raízes quadradas com alto grau de aproximação. O problema pode ter surgido originalmente da tentativa de construir um altar quadrado cuja área seja o dobro da de um altar quadrado dado [união de dois deuses em um deus]. Encontramos um procedimento para determinar um valor aproximado para $\sqrt{2}$ dado por Apastamba e Katyayana[19] em seus *Sulbasutras* que pode ser reformulado da seguinte maneira [Figura 2.5]:

प्रमाणं तृतीयेन वर्धयेत्तच्चतुर्थेनात्मचतुस्त्रिंशोनेन सविशेषः ।

(*Āp. Śl.* I. 5 and *B. Śl.* I. 61-62)[1]

Figura 2.5

"Aumente a medida em sua terça parte e esta terça parte em sua própria quarta parte, menos a trigésima quarta parte desta quarta parte. Este valor é uma quantidade especial em excesso.[20]*"*

Se tomarmos uma unidade como a medida do lado do quadrado, esta fórmula dá o comprimento aproximado da diagonal do quadrado (lado do quadrado desejado) com

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{34}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} \cong 1.414215686$$

Um comentarista dos *Sulbasutras*, Rama, que viveu em meados do século XV d.C., apresentou uma outra aproximação para $\sqrt{2}$ acrescentando os seguintes termos à equação:

$$\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34 \cdot 33} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34 \cdot 34}$$

Nenhuma indicação é dada de como os autores dos *Sulbasutras* acharam esse notável resultado. No entanto, várias explicações têm sido propostas. Datta, em 1932, fez uma bela sugestão de como esta aproximação pode ter sido alcançada.

[19] Amma, S. T. A. p. 42 .

[20] As traduções dos textos em sânscrito que aparecem neste trabalho foram feitas a partir das traduções para o inglês encontradas em Amma, S. T. A.

A idéia básica da sugestão de Datta para chegar ao cálculo de $\sqrt{2}$ encontrado nos *Sulbasutras* consiste em tomar dois quadrados e recortar o segundo, montando-o em torno do primeiro a fim de obter um quadrado duas vezes maior.

Essa sugestão é razoável devido ao problema encontrado nos *Sulbasutras*, que pode ter motivado o cálculo desta aproximação para $\sqrt{2}$ ou seja,

Construir um altar quadrado, cuja área seja o dobro de um altar quadrado dado.

Cálculo aproximado de $\sqrt{2}$ usando a sugestão de Datta:

- Tomar dois quadrados equivalentes.

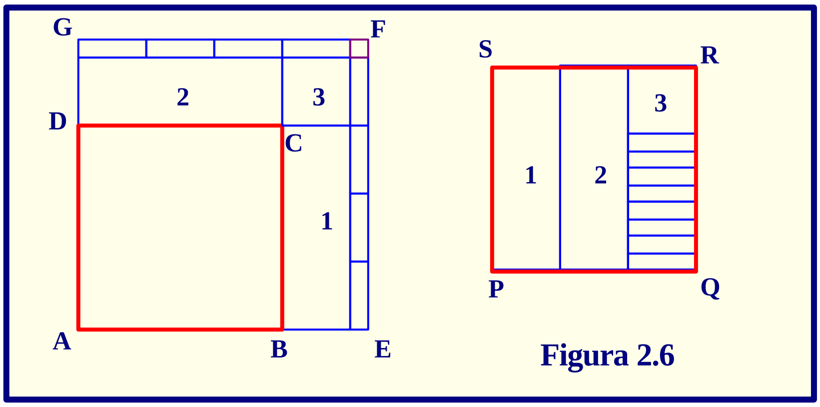


Figura 2.6

- Cortar o segundo quadrado em três tiras iguais.
- Colocar as tiras 1 e 2 em torno do primeiro quadrado como indicado na [Figura 2.6].
- Cortar um quadrado no topo da terceira tira e colocar na posição 3.

Temos um novo quadrado, mas que ainda não é o quadrado procurado. Restam algumas partes do segundo quadrado que têm que ser reunidas em torno do primeiro.

- Cortar as partes restantes ($\frac{2}{3}$ de uma tira) em 8 tiras iguais e amarrar em torno do quadrado que estamos construindo na [Figura. 2.6].

Usamos agora, todas as partes do segundo quadrado, mas a nova figura que construímos ainda é quase um quadrado, faltando um pequeno quadrado no canto para completá-la.

O lado desse "quase" quadrado é

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}\right)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}$$

que são realmente os primeiros três termos da aproximação.

A área do pequeno quadrado é $\left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{3\cdot 4}$.

Para fazer a área do quadrado AEFG aproximadamente igual à soma das áreas dos quadrados originais ABCD e PQRS, imagine que se corte duas tiras muito estreitas de largura *x* do quadrado AEFG no seu lado esquerdo e inferior.

Então,

$$2x\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)-x^2=\left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)^2$$

Simplificando a equação e ignorando x^2 (uma quantidade insignificante), temos

$$2x\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)\cong\left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)^2$$

$$2x\cdot\left(\frac{12+4+1}{3\cdot 4}\right)\cong\left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)^2$$

$$2x\cdot\left(\frac{17}{3\cdot 4}\right)\cong\left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)^2 \rightarrow x\cong\left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)^2\cdot\left(\frac{3\cdot 4}{17}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$x\cong\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$$

A diagonal de cada um dos quadrados originais é $\sqrt{2}$, que pode ser aproximada pelo lado do novo quadrado

(i.e.)

$$\sqrt{2}\cong 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$$

As civilizações antigas usavam métodos aproximados para resolverem problemas o que permitiu a solução de alguns cujos métodos de resolução atuais exigem técnicas encontradas na matemática em épocas mais recentes. Analisar em um curso de formação de professores, os diversos métodos e técnicas encontrados na história da matemática e na etnomatemática para resolver um determinado problema, discutir a possibilidade de colocar os alunos do ensino fundamental e médio em contato com aqueles métodos que fossem adequados ao seu nível de escolaridade e propiciar a oportunidade de discutirem métodos descobertos pelos próprios professores-alunos poderia incentivá-los a fazerem um trabalho semelhante no ensino fundamental e médio..

O Katyayana *Sulbasutra* também fornece um método para combinar qualquer número de quadrados de mesma área em um único quadrado cuja área seja igual à soma das áreas dos quadrados combinados. [Figura 2.7].

यावत्प्रमाणानि समचतुरश्राण्येकीकर्तुं चिकीर्षेत् एकोनानि तानि भवन्ति तिर्यक् द्विगुणान्येकत एकाधिकानि । त्र्यस्रिर्भवति तस्येषुस्तत्करोति ।

(*K. Sl.* VI. 7)

Figura 2.7

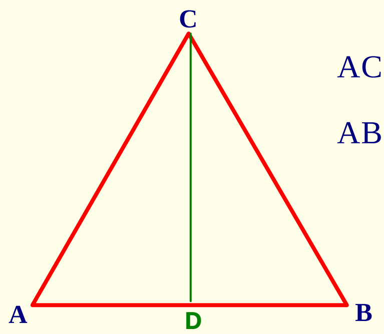
Datta[21] fornece a seguinte interpretação para o texto

Tantos quadrados [de lados iguais] quantos você deseja combinar em um, a linha transversal será um a menos do que isso [o número de quadrados], duas vezes o lado será um a mais do que isso [o número de quadrados]. Ele será um triângulo. Faça aquele [o lado do quadrado desejado] como sua altura [do triângulo].

O método proposto pode ser descrito, como segue:

- Seja **n** o número de quadrados iguais que devem ser combinados para formar o único quadrado e **a** o comprimento dos lados de todos os quadrados a serem combinados.

- Construir um triângulo ABC isósceles de lados $\frac{(n+1)a}{2}$ e base (n-1)a. [Figura 2.8]



$$AC = BC = \frac{(n+1)a}{2}$$

$$AB = (n-1)a$$

Figura 2.8

- Construir a altura CD do triângulo ABC.

- Construir o quadrado de lados CD. Este é o quadrado.

De fato,

- A área do quadrado de lado CD é igual a $(CD)^2$.

- Pelo teorema de Pitágoras, $CD^2 = AC^2 - AD^2$

[21] Datta *apud* Amma, S. T. A. p. 43

Logo,

$$CD^2 = \frac{(n+1)^2a^2}{4} - \frac{(n-1)^2a^2}{4}$$

$$= \frac{(n^2+2n+1-n^2-2n-1)a^2}{4} = na^2$$

Métodos para construir quadrados cujas áreas são frações da área de um quadrado dado, também são encontrados nos *Sulbasutras*. Por exemplo, como o altar *Sautramani* é $\frac{1}{3}$ do *Saumiki*, os *Sulvasutras* fornecem um método para construir quadrados cuja área é $\frac{1}{3}$ daquela de um quadrado dado. O método utilizado pode ser generalizado para uma fração qualquer da área do quadrado.

O método [Figura 2.9] apresentado no Katyayana *Sulbasutra* pode ser interpretado como segue:

तृतीयकरण्येतेन व्याख्याता । प्रमाणविभागस्तु नवधा करणीतृतीयं नवभागः ।
नवभागास्त्रयः तृतीयकरणी ।

Figura 2.9 (K. Sl 15-

- Dividir o quadrado dado em 9 partes iguais, dividindo cada um dos seus lados em 3 partes iguais [Figura 2.10]

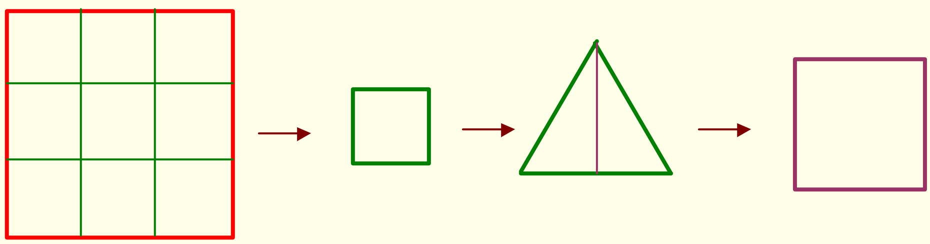


Figura 2.10

- Cada um dos quadrados da divisão tem área igual a $\frac{1}{9}$ daquela do quadrado dado.

- Combinar 3 destes quadrados para formar um quadrado de área $\frac{1}{3}$ daquela do quadrado dado.

Podemos, através de um processo indutivo, levar nossos alunos a perceberem que este método utilizado pelos indianos pode ser generalizado fornecendo-nos um método para construir quadrados de área igual a $\frac{m}{n}$ da área de um quadrado dado.

Se desejamos construir um quadrado de área igual a $\frac{m}{n}$ daquela do quadrado dado, procedemos do seguinte modo:

- *Dividimos os lados do quadrado em n partes iguais, construindo uma malha de quadrados cuja área é igual a $\frac{1}{n^2}$ da área do quadrado dado.*
- *Combinamos **nm** desses quadrados para formar um quadrado de área $mn\frac{1}{n^2}=\frac{m}{n}$ da área do quadrado dado, resolvendo assim o problema.*

Um outro problema, semelhante ao anterior, encontrado nos *Sulbasutras*

Dividir um quadrado em 21 retângulos congruentes.

A solução é do mesmo tipo da que acabamos de apresentar.

"Tendo dividido o quadrado ... em sete partes (por linhas traçadas de leste para oeste) temos que dividir suas larguras em três partes."

Encontramos também nos *Sulbasutras* o problema de determinar a interseção de dois círculos com centros A, B e raios **a** e **b**, respectivamente.[22] Para resolver este problema eles utilizam o seguinte método:

- Tomar uma corda de comprimento a + b.
- Fazer uma marca a uma distância a de uma das extremidades amarrando esta extremidade em uma estaca em A.
- Amarrar a outra extremidade em B, erguer a corda pela marca e esticá-la até a marca tocar o solo em C. C é um dos pontos de interseção dos dois círculos. [Figura. 2.11].

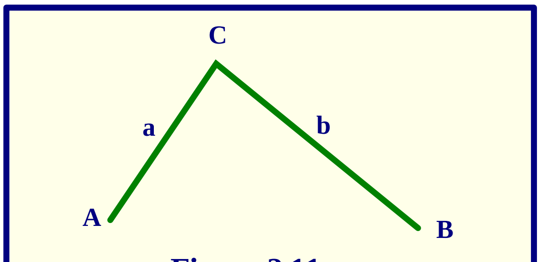


Figura 2.11

[22] Uma das exceções citadas no Cap. 5. Mas essa exceção pode ser substituída por uma permitida pelos postulados de Euclides e, de fato, é executada às vezes pelos próprios ritualistas. [Seidenberg, A. p. 498].

Esta construção permite:

- *Encontrar os pontos de interseção de dois círculos sem traçar os círculos.*
- *Perceber que dois círculos podem não se interceptar, se interceptarem em um único ponto ou se interceptarem em exatamente dois pontos [Figura. 2.12.]*

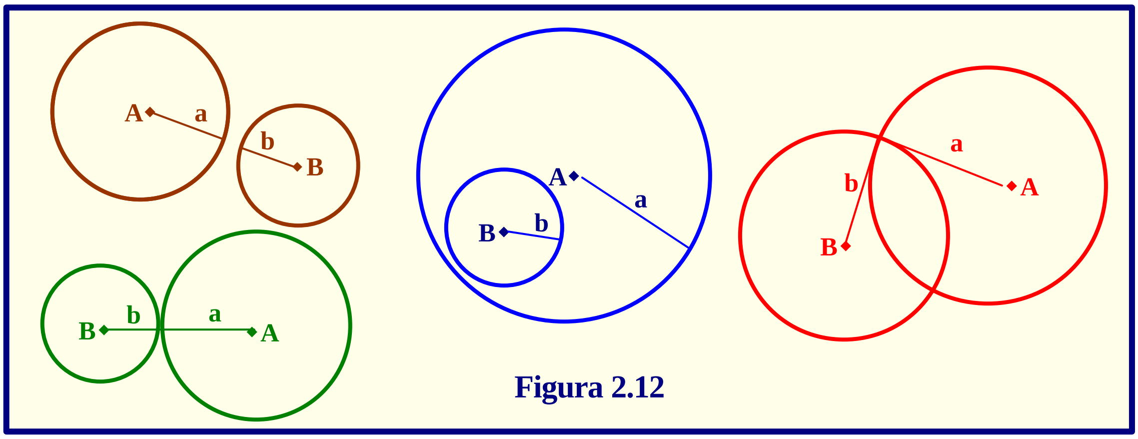


Figura 2.12

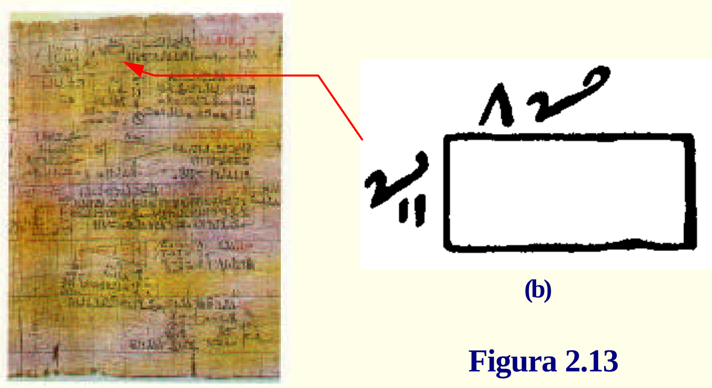
- *Perceber que dois círculos não se interceptam se a + b é menor que a distância entre os pontos A e B [d(A,B)] ou a > d(A,B) + b ou b > d(A,B) + a; se interceptam em um único ponto quando a + b = d(A, B) e se interceptam em exatamente dois pontos se d(A, B) < a + b e a < d(A, B) + b e b < d(A, B) + a.*
- *Essa última relação é a desigualdade triangular (i.e.) a condição necessária e suficiente para que três segmentos de reta determinem um triângulo.*

A discussão dos problemas aqui apresentados em um curso de formação de professores e a análise de quais conhecimentos geométricos estão implícitos nestas construções permitem uma ampla discussão sobre o conceito de círculo, de mediatriz, bissetriz, altura e suas propriedades; sobre triângulos isósceles; métodos de construção com régua e compasso e com a utilização de softwares geométricos de perpendiculares, mediatrizes, quadrados, ponto médio de um segmento, divisão de um segmento em n partes iguais; propriedades sobre diagonais de retângulos e quadrados; de tangentes a circunferência; áreas de retângulos, triângulos etc.

Com relação à área de retângulos, nos papiros conhecidos fica claro que os escribas **egípcios** achavam a área de retângulos multiplicando comprimento e largura como fazemos hoje.[23]

[23] Gillings, R. J. p. 137

No problema 49 do papiro Rhind[24], a área de um retângulo de comprimento 10 *khet*[25] e largura 1 *khet*[26] é encontrada como sendo 1000 x 100 = 100 000 cúbitos quadrados.(Figura 2.13)



(b)

Figura 2.13

(**a**)

A área foi dada pelo escriba como 1000 faixas cúbicas, que são retângulos, usualmente de terra, 1 *khet* por 1 cúbito.

No problema 6 do papiro Moscou, o cálculo da área de um retângulo é usado em um problema de equações simultâneas.

O problema mostra como calcular as dimensões de um retângulo de área 12 e comprimento $\overline{2}\ \overline{4}$ da largura.

O texto que acompanha o retângulo da figura 2.14. pode ser interpretado do seguinte modo[27]:

Figura 2.14

- Método para calcular [as dimensões] do retângulo;
- Se digo que o retângulo de área 12 tem largura $\overline{2}\ \overline{4}$ $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\right]$ do comprimento;

[24] Gillings, R. J. p. 137; Robins, G.; Shute, C. p. 47
[25] 1 *khet* = 100 cúbitos
[26] O escriba ao copiar cometeu um erro, colocando 2 *khet* ao invés de 1 *khet* e repetiu em sua figura, mas não existem erros em seus cálculos com 1 *khet*.
[27] Gillings, R. J. p. 135

- Calcular $\bar{2}\,\bar{4}$ até obter 1[o inverso de $\bar{2}\,\bar{4}$]. Resultado $1\;\bar{3}$ $\left[1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\right]$;
- Calcular 12 vezes $1\;\bar{3}$. Resultado 16;
- Calcular seu ângulo [raiz quadrada]. Resultado 4 para o comprimento;
- $\bar{2}\,\bar{4}$ [de 4] é 3 para a largura.

Se x e y são, respectivamente, o comprimento e a largura do retângulo de área A, temos na notação moderna o sistema:

$$\begin{cases} xy = A & [12] \\ y = \frac{3}{4}x & [\text{y é } \bar{2}\,\bar{4} \text{ de x}] \end{cases}$$

Resolvendo em x

$$\frac{3}{4}x^2 = A \xrightarrow[\left(\text{inverso de } \frac{3}{4}\right)\times A]{} x^2 = \frac{4}{3}A \quad [x^2 = 16]$$

Portanto,

$$x = \sqrt{\frac{4}{3}A} \qquad [x = 4] \text{ para o comprimento,}$$

e

$$y = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{3}A} \qquad [y = 3] \text{ é a largura.}$$

A prova de que os **babilônios** calculavam o comprimento da diagonal de um quadrado usando uma boa aproximação para $\sqrt{2}$ pode ser encontrada na tábula babilônica pertencente ao antigo império babilônico e que faz parte da coleção da Universidade de Yale[28].

Nela encontramos um diagrama como mostra a figura 2.15 onde o número 30 indica o comprimento do lado do quadrado e dos outros números, o superior é 1;24,51,10 indicam o comprimento da diagonal do quadrado – no sistema sexagesimal.

[28] Joseph, G. G. p. 152

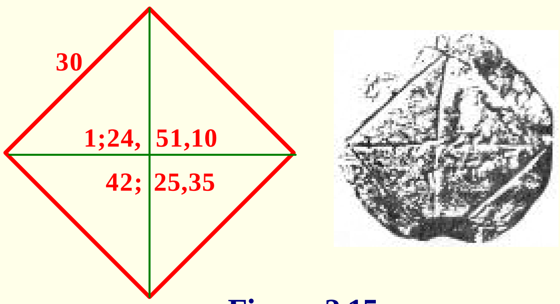


Figura 2.15

Em notação decimal este número corresponde a

$$1+24\frac{1}{60}+51\frac{1}{60^2}+10\frac{1}{60^3}=1{,}41421296296296$$

O número inferior 42;25,35 corresponde em notação decimal a

$$42+25\frac{1}{60}+35\frac{1}{60^2}=42{,}426388888888$$

que é o resultado do produto de 30 por 1,41421296296296. Isto significa que o texto babilônico nos mostra o cálculo da diagonal de um quadrado de lado 30 usando 1; 24,51,10 como constante multiplicativa para determinar esta medida a partir da medida do lado do quadrado.

Assim, o modo como os babilônios calculavam a diagonal **d** de um quadrado de lado λ pode ser escrita na notação atual como

$$d=\sqrt{2}\ell$$

que é a fórmula que utilizamos hoje e que pode ser deduzida a partir do teorema de Pitágoras. Segundo Joseph[29], este é um dos problemas que sugere que os babilônios conheciam o teorema de Pitágoras e o utilizavam cerca de mil anos antes de Pitágoras.

Um outro problema sobre retângulos está em uma das 500 tábulas de argila, o YBC 7289, de cerca de 1750 a.C., encontrados em 1962 em Tell Dhibayi, perto de Bagdá. Neste problema geométrico é dada a área e o comprimento da diagonal de um retângulo e pede suas dimensões.[30]

- Achar o comprimento e a largura dada sua área, 0;45 [0.75] e sua diagonal 1;15 [1,25].

[29] Joseph, G. G. p. 173
[30] Joseph, G. G. p. 173; Fauvel, J.; Gray, J. (Ed) p. 32

A solução sugerida[31] pode ser descrita como segue:

- Multiplicar a área por 2. Resultado 1;30 [1,5]
- Elevar ao quadrado a diagonal. Resultado 1;33,45 [1,5625]
- Subtrair o primeiro resultado do segundo. Resultado 0;3,45 [0,0625]
- Achar a raiz quadrada. Resultado 0;15 [0,25]
- Dividir por 2. Resultado 0;7,30 [0,125]
- Achar a quarta parte de 0;3,45. Resultado 0;0,56,15 [0,015625]
- Somar a área. Resultado 0;45,56,15 [0,765625]
- Achar a raiz quadrada. Resultado 0;52,30 [0,875]
- Comprimento = 0;7,30 + 0;52,30. Resultado 1.
- Largura = 0;52,30 - 0;7,30. Resultado 0;45 [0,75]

Chamando de **x** e **y** o comprimento e a largura do retângulo, **A** sua área e **d** o comprimento da diagonal, a solução babilônica nos conduz ao seguinte método para resolver o problema que pode ser reformulado do seguinte modo:

Determinar o comprimento **x** e a largura **y** de um retângulo de área **A** e diagonal **d**.

Como os babilônios calculavam a área do retângulo como o produto dos lados e o comprimento da diagonal usando o teorema de Pitágoras, o problema se reduz a resolver o sistema

$$\begin{cases} xy = A \\ \sqrt{x^2 + y^2} = d \end{cases}$$

Seguindo os passos sugeridos pelo texto babilônico temos:

- $2xy = 2A$
- $x^2 + y^2 = d^2$
- $x^2 + y^2 - 2xy = d^2 - 2A \rightarrow (x - y)^2 = d^2 - 2A$
- $|x - y| = \sqrt{d^2 - 2A}$
- $\frac{|x - y|}{2} = \frac{\sqrt{d^2 - 2A}}{2}$

[31] Joseph, G. G. p. 173

- $\frac{1}{4}[x^2+y^2-2xy]=\frac{d^2-2A}{4}$
- $\frac{1}{4}[x^2+y^2-2xy]+xy=\frac{d^2-2A}{4}+A \rightarrow \frac{(x+y)^2}{4}=\frac{d^2+2A}{4}$
- $\frac{|x+y|}{2}=\frac{\sqrt{d^2+2A}}{2}$
- Comprimento = x = $\frac{|x+y|}{2}+\frac{|x-y|}{2}=\frac{\sqrt{d^2+2A}}{2}+\frac{\sqrt{d^2-2A}}{2}$
- Largura = y = $\left|\frac{|x+y|}{2}-\frac{|x-y|}{2}\right|=\left|\frac{\sqrt{d^2+2A}}{2}-\frac{\sqrt{d^2-2A}}{2}\right|$
- Vemos aqui, claramente, um procedimento para resolver um sistema de equação do segundo grau a duas incógnitas usando o método de completar quadrados.

Joseph[32] considera que este exemplo resume a versatilidade da matemática babilônica e que lá se reuniu um grupo de pessoas que pela primeira vez combinou a aritmética, a álgebra e a geometria para resolver problemas.

Outros problemas sobre retângulos encontrados nas tábulas babilônicas são:

- Uma área A, que consiste na soma de dois quadrados, é 1000. O lado de um dos quadrados é 10 menos do que os dois $\frac{2}{3}$ do lado do outro quadrado. Quais os lados do quadrado? [Encontrado em uma tábula de argila de Strasburgo que data de 1800 a.C.]
- Na tábula do Louvre de cerca de 300 a.C. há quatro problemas relativos a retângulos de áreas unitárias e de um dado semiperímetro. Pedem-se os lados do retângulo.[33]

Os problemas sobre cálculo de áreas no texto **chinês**, *Jiuzhang suanshu* estão, principalmente, no Capítulo I intitulado *fang-fien* ou "medida de campos". A área de um quadrado e de um retângulo é calculada como o produto dos lados de modo análogo ao das demais civilizações aqui estudadas[34].

Para calcular a área de um polígono, o processo geralmente usado pelo comentarista do *Jiuzhan suanshu*, Liu Hui, consiste em decompor a figura de modo a construir um retângulo

---

[32] Joseph, G. G. p.175
[33] Eves, H. p. 79
[34] Yan, L.; Shíràn, D. p. 41; Mikami, Y. p. 10

de mesma área da figura dada. Esta técnica é semelhante à usada pelos indianos nos *Sulbasutras* e por Euclides no Livro I dos Elementos.

O livro I do *Jiuzhang suanshu* começa com a área de um campo retangular. No problema 1 nós lemos:

- Agora temos um campo: ele tem 15 "passos" de largura e 16 de comprimento. A questão é: Qual o tamanho do campo?

A resposta: (= 1 *Mou*) é dada.

O segundo problema é semelhante a este e a resposta também é dada. Então uma forma geral é apresentada. De acordo com Seidenberg, com poucas exceções, este é o formato usado em todo trabalho: um ou dois problemas de algum tipo são colocados, a resposta é dada, e a regra geral apresentada.[35]

Isto sugere um método para descobrir fórmulas ou para levar os alunos a aceitarem uma fórmula para resolver um problema. O risco aqui é do aluno achar que a recíproca é verdadeira. Isto é, que para verificar a aplicabilidade de uma fórmula seria suficiente comprová-la apenas em alguns exemplos particulares.

O objetivo do livro IV o *shao-kuang* é a determinação de um retângulo, cuja área e lados são dadas e a avaliação de raízes quadradas e cúbicas de um dado número.

Um dos problemas deste capítulo é:

- Dada área de um campo retangular e sua largura, qual é seu comprimento?

Aqui o problema é resolvido por uma simples divisão. Os 11 primeiros problemas são sobre isto.

O problema 12 pergunta sobre o lado de um quadrado de 55225 *Pu*. Resposta: 23 medidas. Aparece aí a raiz quadrada. O trabalho está no sistema decimal.

3.3. A quadratura do círculo

Cálculos da área do círculo e comprimento da circunferência são encontrados na civilização indiana, egípcia, babilônica e chinesa. Cada uma delas utilizou métodos específicos que nos levam a diversos valores para π.

Como vimos anteriormente, na antiga civilização **indiana** existiam sepulturas quadradas e circulares e, por um motivo que não se conhece, as duas sepulturas teriam que ter a mesma área.

---

[35]Seidenberg, A. p. 107

Isso conduziu aos problemas:

- Da circulatura do quadrado[36]:

Achar um círculo igual em área a um quadrado dado.

Solução apresentada no *Apastamba* Sulbasutra:

- Dado um quadrado ABCD (Fig. 3.1)
- Achar o centro.
- Girar OD para a posição OE, que está na linha OP, onde P é o ponto médio de CD.
- Seja Q o ponto entre P e E, tal que PQ = $(\frac{1}{3})$PE.
- O círculo desejado tem centro O e raio OQ.

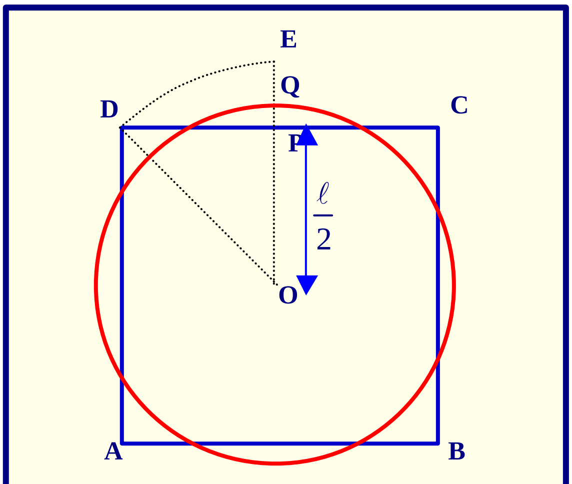


Figura 3.1.

Se ℓ é o lado do quadrado e **d** o diâmetro do círculo temos que o raio **r** do círculo é dado por:

$$r = \frac{d}{2} = OQ = OP + \frac{1}{3}PE = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{3}(OE - OP)$$

$$= \frac{\ell}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\ell}{6} + \frac{2\ell}{6} = \frac{(\sqrt{2}+2)\ell}{6}$$

Esse resultado para o raio do círculo apóia a afirmação de que o problema de calcular valores aproximados para $\sqrt{2}$, pelos indianos, poderia estar associado ao problema da

[36] Eves, H. p. 257; Seidenberg, A. p. 515, p. 173 e p.325; Serres, M. p. 158; Katz, V. J. J. p. 41; Joseph, G. G. p. 317; O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. p. 3

circulatura do quadrado como afirma Seidenberg[37] e não da duplicação do quadrado como sugere Joseph[38] e a sugestão de Datta para chegar ao cálculo de $\sqrt{2}$ encontrado nos *Sulbasutras*.

Comparando o resultado obtido pelos indianos com a fórmula para área do círculo que conhecemos hoje temos:

$$p\,\mathrm{r}^2 = \ell^2$$

onde

$$\mathrm{r} = \frac{\left(\sqrt{2}+2\right)\ell}{6}$$

ou seja,

$$p \cdot \frac{\left(\sqrt{2}+2\right)^2 \ell^2}{36} = \ell^2$$

(i.e.)

$$p = \frac{36}{(\sqrt{2}+2)^2\,\ell}$$

Substituindo pela aproximação para $\sqrt{2}$ usada pelos indianos[39] obtemos um valor de

$$\pi \cong 3{,}088307912737542133077746960838$$

- A quadratura do círculo[40]:

Construir um quadrado de área igual à de um círculo dado.

Solução apresentada pelos **indianos** nos três *Sulbasutras*[41]:

"Se você deseja transformar um círculo em um quadrado, divida o diâmetro em oito partes e novamente uma dessas 8 partes em 29 partes; dessas 29 partes remova 28 e, além disso, a sexta parte (da parte deixada) menos a oitava parte (da sexta parte)."

Ou seja,

---

[37] Seidenberg, A. p. 517
[38] Joseph, G. G. p. 319
[39] Ver pág . 114 deste capítulo.
[40] A quadratura do círculo é um dos três problemas clássicos da geometria grega juntamente com a trissecção do ângulo e duplicação do cubo.
[41] Joseph, G. G. p.318, Seidenberg, A. p. 326; p.173; Katz, V. J. p. 21

$$\ell = d - \left[\frac{d}{8} + \frac{d}{8.29} + \frac{d}{6.8.29} - \frac{d}{8.6.8.29}\right]$$

onde d é o diâmetro do círculo.

Isso equivale a tomar como aproximação para π o valor:

$$p \cong 3{,}0280250149148665609723873695336 2$$

Vale a pena observar que muitos valores diferentes de π aparecem nos *Sulbasutras*, inclusive valores diferentes em um mesmo texto. Cada construção implicava em um algum valor de π. Por exemplo, no *Baudhayana Sulbasutra*, aparece o valor de $\frac{676}{225}$, como também $\frac{900}{289}$ e $\frac{1156}{361}$. Em *Sulbasutras* diferentes todos os valores 2.99, 3.00, 3.004, 3.029, 3.047, 3.088, 3.1141, 3.16049 e 3.2022 podem ser achados e o valor $p = \frac{25}{8} = 3.125$ é encontrado *no Manava Sulbasutras*[42].

Os **chineses** estavam familiarizados com a relação entre a área, o comprimento da circunferência e o diâmetro do círculo.

O *Jiuzhang suanshu* ou *Chiu-Chang Suan-Shu* propõe quatro fórmulas para calcular a área do círculo:[43]

- $A = \frac{C}{2} \cdot \frac{d}{2}$
- $A = \frac{C \cdot d}{4}$
- $A = \frac{3}{4} d^2$
- $A = \frac{1}{12} C^2$

onde d é o diâmetro do círculo e C o comprimento da circunferência.

As duas últimas fórmulas usam π = 3 mas as duas primeiras são equivalentes a que utilizamos hoje.

---

[42] O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. p. 3 Seidenberg, A. p. 103

[43] Martzloff, J. C. p. 277; Mikami, Y. p. 10; Eves, H. p. 243; Cajori, F. p. 71; Boyer, C. B. p. 134; Katz, V. J. p. 21

No *Jiuzhang suanshu* nós encontramos explicitamente a fórmula $A = \frac{C}{2} \cdot \frac{d}{2}$ que vem primeiro e a solução apresentada em alguns problemas poderia nos levar a ver as outras como derivadas desta e do fato de C = 3d. Isto não implica que $A = \frac{C}{2} \cdot \frac{d}{2}$ tenha sido a fórmula favorita mas existe alguma razão para pensar que ela tenha sido, desde que nas regras para um cilindro circular e um cone circular a fórmula $A = \frac{C}{2} \cdot \frac{d}{2}$ é usada.[44]

No problema 31 do capítulo I do *Jiuzhang suanshu* encontramos[45]:

"Temos um campo redondo; a circunferência é 30 Bu, o diâmetro 10 Bu. Qual é o tamanho do campo?

A resposta diz: 75 Bu[46]

Observe que nesse problema eles estão considerando $\pi = 3$ e portanto C = 3d justificando o argumento acima.

É interessante observar que o dado sobre o comprimento da circunferência não é necessário para resolver o problema.

No problema 32 do capítulo 1 é feita a seguinte pergunta[47]:

Um campo circular tem perímetro de 181 medidas, um diâmetro de 60 e um terço. Qual é sua área?

A reposta é a seguinte:

A área é igual à metade do perímetro vezes metade do diâmetro.

Aqui a fórmula $A = \frac{C}{2} \cdot \frac{d}{2}$ foi utilizada e os dados do problema indicam que para o perímetro foi usada a fórmula C = 3d o que significa que π foi considerado como sendo igual a 3. Mais uma vez o argumento acima fica justificado.

Encontramos também no segundo diálogo do *Zhoubi suanjing*[48]

No solstício de inverno a órbita do sol tem diâmetro de 476 000 milhas, a circunferência da órbita sendo 1 428 000 milhas.

Também, neste caso a circunferência do círculo é tomada como três vezes o diâmetro.

---

[44] Seidenberg, A. p.109. Ver capítulo deste texto.
[45] Horng, W-S. p. 404; Seidenberg, A. p. 180
[46] *Bu* é igual à aproximadamente 126 cm. Horng, W-S. p. 406 e p. 38
[47] Siu, M-K. p. 62 e p.159
[48] O mais velho trabalho matemático deixado pelos antigos chineses. [Mikami, Y. p. 5]

Esse resultado é curioso porque é simples perceber que o comprimento da circunferência é maior do que 3 vezes o diâmetro. Talvez esse valor tenha sido usado por tão longo período por ser fácil de calcular, e porque o resultado servia para propósitos práticos. Ou talvez, tenha sido passado pela tradição e fosse difícil mudá-lo.

A fórmula

$$A = \frac{3}{4}d^2$$

pode ser derivada de

$$A = C\frac{d}{4}$$

substituindo **C** por **3d**, ou ser encontrada pela média das áreas de quadrados inscritos e circunscritos na circunferência [Figura 3.2].

De fato,

- O lado de um quadrado circunscrito a uma circunferência de diâmetro d é igual a d.
- O lado ℓ do quadrado inscrito a essa circunferência é igual a $\frac{\sqrt{2}d}{2}$.

As áreas dos quadrados inscritos e circunscritos são portanto, d^2 e $\frac{d^2}{2}$ respectivamente. Assim, a média de tais áreas nos leva a $\frac{3}{4}d^2$.

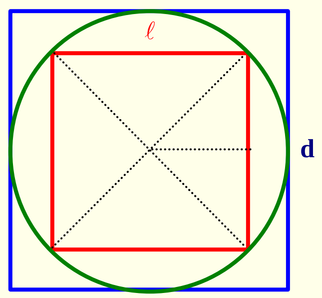


Figura 3.2

Esta solução para o problema da área do círculo pelas médias das áreas dos quadrados inscritos e circunscritos poderia ser uma tentativa de resolver o problema da quadratura do círculo tomando um quadrado intermediário como fez Bryson.

Mas os chineses não ficaram satisfeitos com este valor para π. De acordo com o *Sui-shu*[49], apareceram na China muitas pessoas interessadas no problema da quadratura do círculo. Entre eles estão Liu Hsing, Chang Hêng, Liu Hui, Wang Fan que calcularam o comprimento da circunferência obtendo, cada um deles, resultados diferentes.

Uma das primeiras tentativas para calcular um valor aproximado para π diferente de três se deve ao astrônomo e construtor de calendários Liu Hsing que viveu imediatamente antes do começo da era cristã. Com instruções de seu senhor, Wang Mang, para que fabricasse uma medida padrão de capacidade, Liu Hsing criou uma vasilha cilíndrica fabricada em bronze – para ser usada como medida padrão de capacidade. Essa vasilha tornou-se o protótipo de centenas de vasilhas semelhantes produzidas e distribuídas por toda China. Infelizmente, não sabemos o valor que ele utilizou para π, mas do exame das dimensões de uma destas vasilhas (agora conservada em um museu em Pequim) alguns comentaristas deduziram que Liu Hsing utilizou um valor de π = 3,1547. Esta idéia está apoiada em um parágrafo do *Sui Shu* (História Oficial da Dinastia Sui) no qual se afirma que Liu Hsing havia encontrado um novo valor para π substituindo o valor antigo.

O cálculo de Chang Hêng – astrólogo da corte que viveu no séc. I de nossa era – da área do círculo, também está perdido, embora seu valor de π seja encontrado em uma observação feita por Liu Hui no *Jiuzhang suanshu* como $\sqrt{10}$, um cálculo que também se encontra na matemática jaina na Índia e que havia sido comunicado por *Umasvasti* alguns séculos antes. Chang Hêng construiu um globo celeste que serve para ilustrar os movimentos dos corpos celestes, considerando a Terra como centro do sistema.

O cálculo de Wan Fan para a área do círculo, levou ao resultado 142 para a circunferência de diâmetro 45. Isto corresponde a tomar π = 3.1555... Não conhecemos os detalhes sobre o modo como Wan Fan resolveu o problema da quadratura.[50]

Para provar a fórmula $A = \frac{C}{2} \cdot \frac{d}{2}$ o comentarista Liu Hui (final do séc III d. C.), usa uma aproximação que envolve a passagem ao limite após aproximar a área do círculo usando uma seqüência de polígonos regulares inscritos – o primeiro polígono sendo um hexágono e cada polígono seguinte tendo o dobro do número de lados do anterior[51]. Esta técnica é semelhante a usada por Arquimedes e por Antiphon em sua tentativa para resolver o problema da quadratura do círculo. Mas o trabalho de Liu Hui é bem diferente de seus antecessores gregos.

---

[49] História oficial da Dinastia Sui. [Mikami, Y. p. 46]
[50] Mikami, Y. p. 46-47, Joseph, G. G. p.264
[51] Este método é conhecido como *Gen Yuan* "divisão do círculo". Horng, W-S. p. 39

O raciocínio de Liu Hui engloba uma seqüência de afirmações que surgem do estudo de uma figura irremediavelmente perdida.

Fazendo uma figura, tome o lado do polígono de 6 lados [liugu[52]], multiplicando-o pela metade do diâmetro e triplicando aquele obtemos a área do polígono de 12 lados. Se dividirmos então, [o círculo] novamente, teremos o polígono de 12 lados, multiplicando pela metade do diâmetro e multiplicando aquele por seis, obteremos a área do polígono de 24 lados. Quanto mais fino for o lado, mais a perda decresce para o lado. Dividindo outra vez e outra vez até ficar impossível dividir (mais uma vez) obteremos a coincidência com a substância do disco e não existe mais qualquer perda.[53]

- Dois resultados particulares são afirmados sem mais detalhes:

$$A_{12} = 3\ell_6\left(\frac{d}{2}\right) \text{ e } A_{24} = 6\ell_{12}\frac{d}{2}$$

onde A_i e ℓ_i são, respectivamente, a área e o comprimento do lado de um polígono regular inscrito em um círculo de diâmetro d.

- Um resultado geral, ou conclusões relacionando o que acontece quando o número de lados do polígono cresce, é enunciado de um modo assertivo.

Esse tratamento sistemático para calcular um valor aproximado de π e está contido no notável comentário de Liu Hui sobre o *Jiuzhang suanshu*, no qual a área de um círculo é calculada usando a primeira fórmula.[54]

Na tentativa de explicar esta fórmula e a utilização do valor 3 para a razão entre a circunferência e o diâmetro, Liu Hui trabalhou no sentido de encontrar um método para obter uma aproximação para π. Seu método tem alguma semelhança com a aproximação de Arquimedes, de 400 anos antes.

Podemos interpretar o método de Liu Hui do seguinte modo[55]:

- Considerar o círculo de centro O e raio r [Figura 3.3].

---

[52] *gu* é um vaso angular sacrificial; portanto a idéia de usar seu nome para denotar polígonos. O prefixo *liu* (seis) indica o número de lados do polígono [Martzloff, J. C. p. 278]
[53] Martzloff, J. C. p. 278
[54] Joseph, G. G. p. 266.
[55] Siu, M-K. p. 62; Horng, W-S. p. 406

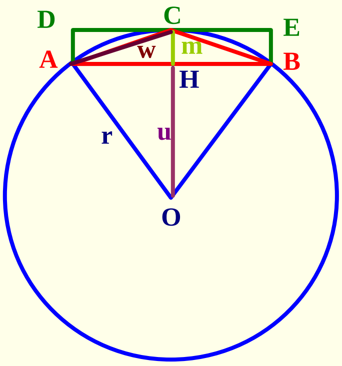


Figura 3.3

O círculo da figura 3.3 tem centro **O** e raio **OC = r**.

Seja AB = s o lado de um polígono regular de n lados inscrito no círculo que tenha o perímetro conhecido.

Então, dados **s** e **n**, utilizamos o teorema de Pitágoras e calculamos:

$$OH = u = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}s\right)^2}$$

$$CH = m = r - u$$

$$AC = w = \sqrt{m^2 + \left(\frac{1}{2}s\right)^2}$$

onde **w** é um dos lados do polígono regular de 2n lados.

A repetição deste procedimento produzirá medidas cada vez mais próximas à circunferência do círculo, em termos da qual pode se definir π. Podemos usar um procedimento semelhante com polígonos circunscritos.

No exemplo dado por Liu Hui, OR = r = 10, n = 6 e PQ = s = 10, e portanto,

$$u = \sqrt{100 - 25} \cong 8{,}660254$$

$$m = 10 - 8{,}660254 = 1{,}339746$$

$$w_1 \cong 5{,}176381$$

A primeira iteração produz $w_1 \cong 5{,}176381$ como o comprimento do lado de um dodecágono regular. Repetindo o mesmo processo para um dodecágono com s = 5,176381 nos dá

$$w_2 \cong 2{,}610524$$

O processo iterativo continua até que encontremos o comprimento do lado do polígono regular inscrito de 96 lados. Então, a área de um polígono regular inscrito de 2n lados é aproximadamente igual a $\frac{1}{2}nsr$, onde s é o comprimento do lado de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r. Para as dimensões dadas anteriormente,

$$A_{12} = \frac{1}{2}(6\times 10 \times 10) - = 300$$

é a área de um dodecágono.

Analogamente,

$$A_{24} = \frac{1}{2}nsr = \frac{1}{2}(12\times 5{,}176381\times 10) = 310{,}5829$$

é a área de um polígono regular com 24 lados.

Continuando desta maneira, Liu Hui encontrou que

$$A_{96} = 313{,}9344 \text{ e } A_{192} = 314{,}1024$$

Observando que a área do disco pode ser inteiramente coberta por 96 figuras poligonais idênticas a OADEB, ele percebe que

$$A_{192} < A < 96 \text{ área[OADEB]}$$

Mas

$$\begin{aligned} \text{Área[OADEB]} &= \text{área[OAB]} + \text{área[ADEB]} \\ &= \text{área [OAB]} + 4 \text{ área[HAC]} \\ &= \text{área [OAB]} + 4[\text{área [OAC]} - \text{área[OAH]]} \\ &= \text{área [OAB]} + 4[\text{área [OAC]} - \frac{1}{2}\text{ área[OAB]]} \\ &= \text{área [OAB]} + 4 \text{ [área [OAC]} - 2 \text{ área [OAB]} \end{aligned}$$

Como

$$96 \text{ área [OAB]} = A_{96} \text{ e } 192 \text{ área [OAC]} = A_{192}$$

temos

$$A_{96} < A < A_{96} + 2A_{192} - 2A_{96}$$

(i.e.)

$$A_{192} < A < 2A_{192} - A_{96}$$

onde A é a área do círculo.

Isto leva a

$$314{,}1024 < A < 314{,}2704$$

Portanto,

$$A \cong 314 \text{ e } S < A < s$$

onde, S é a área do quadrado circunscrito e s a do quadrado inscrito.

Assim,

$$\frac{A}{d^2} = \frac{A}{S} = \frac{157}{200}$$

ou seja,

$$\frac{p r^2}{4r^2} = \frac{p}{4} \cong \frac{157}{200} \rightarrow p \cong \frac{157}{50} = 3.14$$

Existem certas semelhanças entre a obra de Arquimedes e a de Liu Hui. Os dois utilizaram o método da exaustão mas Arquimedes estava preocupado, principalmente, com o cálculo do comprimento da circunferência do círculo e o interesse de Liu Hui se centrou claramente em π.[56]

Se compararmos a razão entre o diâmetro do círculo e o lado do quadrado de mesma área encontrados pelos indianos no problema da circulatura do quadrado temos que:

$$\frac{d_1}{\ell_1} = \frac{2(\sqrt{2}+2)}{6} = \frac{\sqrt{2}+2}{3}$$

com a razão entre os mesmos entes geométricos encontrados pelos chineses na solução do problema da quadratura do círculo

$$\frac{d_2}{\ell_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

vemos que

$$\frac{\frac{d_1}{\ell_1}}{\frac{d_2}{\ell_2}} \cong 1{,}04$$

[56] Joseph, g. G. p. 270, Lay-Yong, L. p. 36-39. Seidenberg, A. p. 115-117

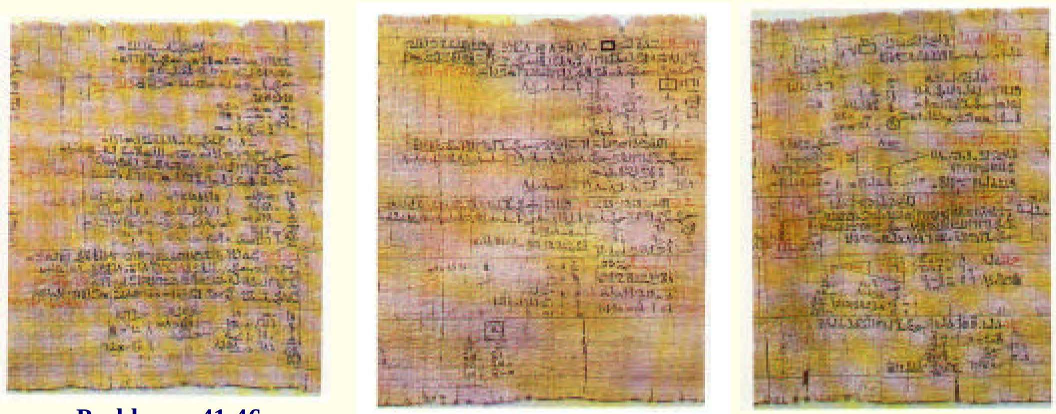
Isto é, os dois problemas conduzem a aproximadamente a mesma razão.

A discussão da solução apresentada pelo comentarista chinês Liu Hui, permite trabalhar com os alunos questões como: polígonos regulares cujos lados são múltiplos de seis, suas áreas e a facilidade dos métodos para calculá-las – que não são gerais para polígonos regulares de n lados, n > 3).

No **Egito** alguns dos celeiros ou depósitos de provisões tinham a forma de um cilindro circular reto**.** Assim, eles conheciam um método para o cálculo do volume de um cilindro e este era análogo ao modo como fazemos hoje: como o produto da área da base pela altura e era o mesmo que eles utilizavam para determinar o volume de um bloco retangular ou paralelepípedo.

Recipientes cilíndricos são utilizados ainda hoje para armazenar alimentos, grãos, combustíveis, etc. Assim, determinar a capacidade de recipientes cilíndricos era uma necessidade dos antigos egípcios e continua sendo necessária em nossos dias.

Como a base de um cilindro circular reto é um círculo, conhecer um método que permitisse determinar a área do círculo era uma necessidade prática. Assim, é nos problemas relativos ao cálculo de capacidades de celeiros cilíndricos que encontramos o método que os egípcios utilizavam para calcular a área do círculo. Este método aparece nos problemas 41, 42, 43, 48 e 50 do papiro Rhind[57] [Figura 3.4].



Problemas 41-46 **Problemas 47-48 Final do 43-46** **Problemas 49-55 Final do 46**

Figura 3.4

O método para determinar a área de um círculo registrado nos problemas 41-43 foi, na opinião de Gillings, o melhor no mundo pré-helênico. As instruções são simples:

- tomar o diâmetro do círculo;

[57] Gilling, R. J. p. 145 e Robins, G.; Shute, C. p. 44

- subtrair sua nona parte;
- quadrar o resultado para obter a área.

Isto leva à fórmula[58]

$$A = \left(d - \frac{d}{9} \right)^2$$

No problema 41 a base circular do celeiro (silo), cujo volume é encontrado, tem diâmetro 9. A área da base de acordo com a regra egípcia é 64 e como a altura é 10, seu volume é 640.

O problema 42 também é sobre o volume de um celeiro cilíndrico, como no problema 41, mas o diâmetro da base é 10 ao invés de 9.

O problema 43 apresenta uma regra relacionando as fórmulas para calcular o volume de um cilindro em duas unidades de medidas de volume distintas.

Os problemas 48 e 50 são muito interessantes do ponto de vista matemático e eles podem dar uma pista de como os egípcios chegaram à fórmula para o cálculo da área do círculo.[59]

Problema 48:

Comparar a área do círculo com a do quadrado circunscrito.

Este, segundo Gillings[60], é o único entre os 87 problemas do papiro Rhind em que a solução contém uma ilustração geométrica. [Figura. 3.5]

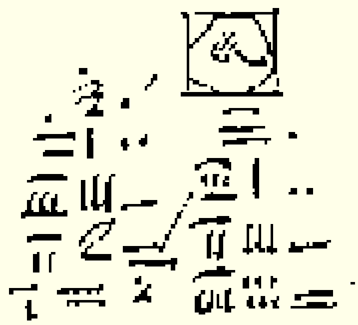


Figura 3.5

No problema 50 do Papiro Rhind lê-se:

"Exemplo de um corpo redondo de diâmetro 9. Qual é a área?

[58] Boyer, C. p. 12; Eves, H. p. 75.; Bunt, L. N. H; Katz, V. J. p. 45
[59] Gillings, R. J. p. 139; Joseph, G. G. p. 127
[60] Gillings, R. J. p. 139

Neste problema o escriba inclui um círculo com inscrições hieráticas. [Figura 3.6]

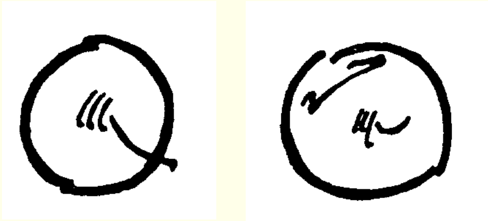


Figura 3.6

Solução apresentada pelo escriba:

- Remover $\frac{1}{9}$ do diâmetro, o restante é 8.
- Multiplicar 8 por 8; perfaz 64. Portanto, a área é 64.

Assim, podemos inferir que o método usado pelo escriba para calcular a área do círculo pode ser:

"Subtrair do diâmetro sua nona parte e elevar o restante ao quadrado. Esta é sua área."

A solução apresentada pelo o escriba pode ser traduzida através da fórmula[61]

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left[\left(\frac{8}{9}\right)d\right]^2$$

onde **d** é o diâmetro do círculo.

Isso que leva a seguinte aproximação para π[62]

$$p \cong 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3{,}160493...$$

A diferença entre este valor aproximado para π e os valores que utilizamos hoje é de apenas 0.0189.[63]

De acordo com Beyers[64], em geral é a ênfase na notação simbólica, cadeias de argumentos lógicos e não o conteúdo matemático – seus métodos e resultados – que freqüentemente impedem o caminho para a compreensão e causa dificuldades no aprendizado.

Quando mostramos a matemática através da história não damos ênfase inicialmente a forma, mas ao conteúdo e, através do processo histórico, podemos chegar à forma. Por

[61] Chamarei esta fórmula de "fórmula egípcia" para a área do círculo.
[62] O papiro de Moscou contém uma fórmula para se calcular a área da esfera, em que é atribuído a π o valor de 3,14.
[63] Engels, H. p. 1
[64] Byers, V. p. 6

exemplo, ao trabalhar o conceito de área do círculo é importante que se inicie com as soluções aproximadas dadas por algumas civilizações para, finalmente, chegar ao cálculo de áreas por processos do cálculo integral. Essa é a ordem histórica na qual o conceito foi desenvolvido. Assim, a compreensão matemática do estudante se transforma ao aprender novas formas – desde que este aprendizado resulte de seu conhecimento do conteúdo e leve a uma expansão desse próprio conhecimento.

Ainda, de acordo com Beyers, o professor tem que ensinar e o estudante deve aprender ambos os aspectos da matemática – conteúdo e forma – e o professor formador de professores deve, pelo menos, sentir a relação entre os dois..[65]

Não sabemos como os egípcios chegaram à fórmula

$$A = \left[\left(\frac{8}{9}\right)d\right]^2$$

para o cálculo da área de um círculo de diâmetro **d**, mas existem várias explicações que aparecem em alguns textos de história da matemática e de etnomatemática baseadas no conhecimento sobre a cultura egípcia.

Tais explicações fornecem uma quantidade de materiais e métodos que podem ser utilizados em sala de aula na discussão do cálculo da área do círculo.

1ª. Explicação:

Os egípcios para decorarem as paredes das construções cobriam tanto a parede como o modelo a ser utilizado com malhas quadriculadas e transportavam cada parte do modelo proporcionalmente para o local correspondente na parede.

Considere agora o desenho da figura 3.5 feito pelos egípcios e o fato deles usarem malhas quadriculadas.

O octógono inscrito no quadrado sugere naturalmente o desenho de uma malha formada por 9 quadrados. [Figura 3.7].

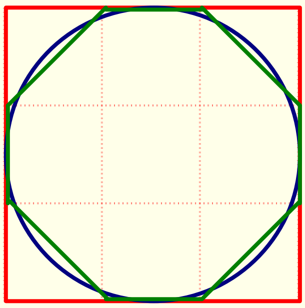


Figura 3.7

[65] Byers, V. p. 7

Inserindo na figura o círculo inscrito no quadrado, observamos que algumas regiões do octógono são exteriores ao círculo, e algumas do círculo exteriores ao octógono. Além disso "*parece que*" a área da região do octógono exterior ao círculo é "*igual*" à área da região do círculo exterior ao octógono. Isso nos leva a inferir que o círculo e o octógono devem ter aproximadamente a mesma área.

Mas se **d** é o diâmetro do círculo – que é igual ao lado do quadrado – temos que a área do octógono é igual a:

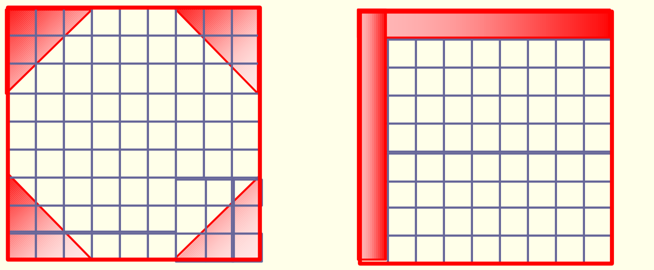
$$d^2 - 2\left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}d^2 = \frac{63}{81}d^2 \cong \frac{64}{81}d^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

que é a fórmula egípcia.

2ª. Explicação:

Observe também que a área do octógono é igual a área do quadrado menos 4 vezes a de um dos triângulos hachurados [Figura 3.8].

Dividindo cada um dos quadrados da malha em 9 quadrados menores de mesma área, isto produz uma malha que cobre o quadrado maior contendo 81 destes quadrados menores. [Figura 3.8 (a)].



(a) **Figura 3.8** (b)

A região hachurada pode ser reorganizada de acordo com a figura 3.8 (b).

Observe que:

- os dois triângulos hachurados no topo do quadrado juntos [Figura 5a] têm a mesma área do retângulo hachurado no topo do quadrado [Figura 5b];
- analogamente, os dois triângulos hachurados na base do quadrado juntos [Figura 5a] têm a mesma área do retângulo hachurado no lado esquerdo do quadrado [Figura 3.8 (b)].

Assim, a área do octógono é igual à área do quadrado de lado $\frac{8}{9}d$ menos a área do quadrado de lado $\frac{1}{9}d$.

Portanto, a área do círculo de diâmetro **d** é dada aproximadamente por:

$$A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 - \left(\frac{1}{9}d\right)^2$$

$$= \left(\frac{8}{9}d\right)^2 - \frac{1}{81}d^2 \cong \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

que é a fórmula egípcia.

Observe que esta dedução independe da medida **d** do diâmetro do círculo.

3a. Explicação

O fato dos pedreiros egípcios cobrirem seus desenhos e paredes com malhas quadriculadas e a tentativa experimental de desenhar um círculo de mesma área que um quadrado sugerem uma outra explicação para a fórmula egípcia.

Ao tentar desenhar um círculo de mesma área que um quadrado podemos chegar experimentalmente à figura 3.9.

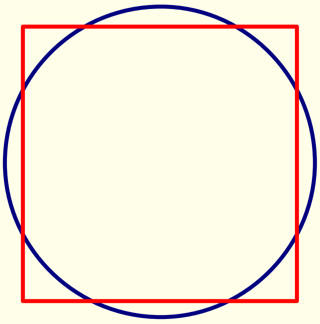


Figura 3.9

Esta figura sugere a divisão do lado do quadrado em quatro partes iguais [Figura 3.10 (a)] e permite encontrar uma relação entre o diâmetro do círculo e o lado do quadrado utilizando o teorema de Pitágoras.

Se **d** é o diâmetro do círculo e **a** é o lado do quadrado então pelo teorema de Pitágoras:

$$r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16} = \frac{5a^2}{16} \quad \rightarrow r = \frac{\sqrt{5}a}{4} \quad \rightarrow d = 2r = \frac{\sqrt{5}a}{2} \quad \rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{5}}d.$$

Por outro lado, os pontos resultantes da divisão do lado do quadrado em quatro partes iguais podem servir para a construção de uma malha quadriculada. [Figura 3.10 (b)].

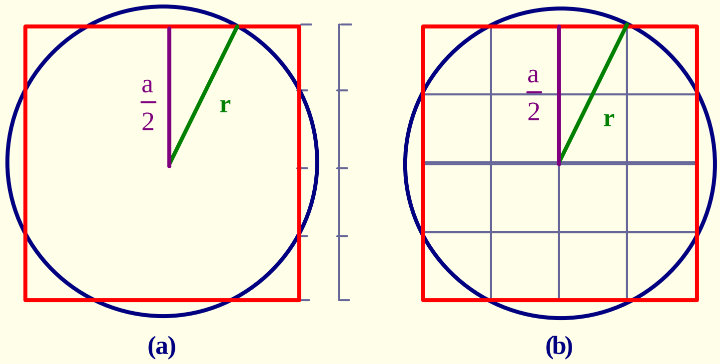


Figura 3.10

A malha possibilita um modo de obter uma relação entre o lado do quadrado e o diâmetro do círculo.

Dividindo cada quadrado da malha em 16 quadrados menores de mesma área obtemos para o quadrado maior uma malha formada por 256 quadrados menores. [Figura 8a].

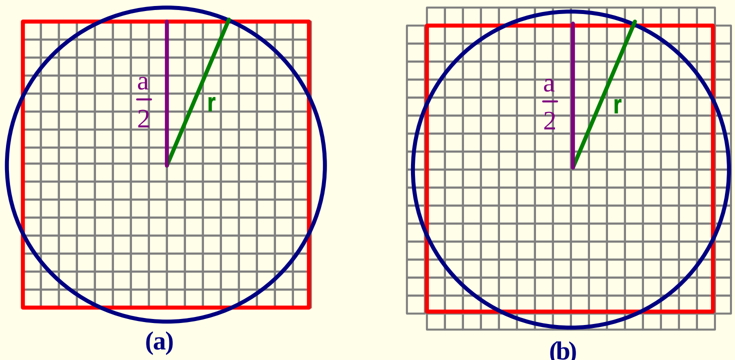


Figura 3.11

Completando a figura 3.11(a) de modo a cobrir todo o círculo com a malha quadrada [Figura 3.11(b)] encontramos a seguinte relação entre **a** e **d**:

$$a = \frac{8}{9} d \, .$$

Se consideramos para **a** o valor acima e não o valor $\frac{2}{\sqrt{5}} d$ obtemos para a área do círculo a fórmula egípcia $\left(\frac{8}{9} d\right)^2$ ao invés de $\left(\frac{2}{\sqrt{5}} d\right)^2$.

4a. Explicação

O jogo de tabuleiro mancala - que significa “transferir” em árabe – considerado por muitos historiadores como o jogo mais velho do mundo é o nome genérico para mais de 200 jogos semelhantes entre si, originários do Antigo Egito. Todos simbolizam a época da plantação e colheita e possuem de 3500 a 7000 anos. Tais jogos são muito populares na África e seu objetivo é transferir as peças de uma das casas do tabuleiro para as outras até que todas fiquem vazias. Como peças, utiliza-se sementes quase esféricas, seixos ou grãos.

Segundo Gerdes, por se tratar de um jogo de estratégias seria natural que um dos participantes, enquanto esperasse pelo término da jogada do outro, brincasse com suas peças podendo dentre outras coisas “formar”, “transformar” e “contar” padrões geométricos.

Por exemplo, é possível construir com 10 peças circulares do jogo um triângulo eqüilátero e depois transformá-lo em um retângulo[66]. [Figura 3.12].

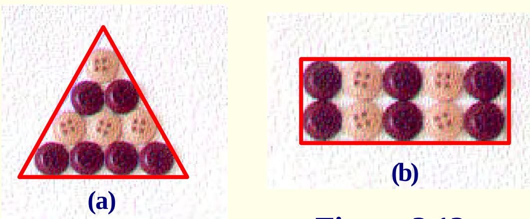


Figura 3.12

A área “aproximada” destas duas figuras seria a mesma.

É possível também “construir” círculos usando peças circulares do jogo (círculos menores) e, um modo simples de fazê-lo é construir anel por anel. [Figura 10].

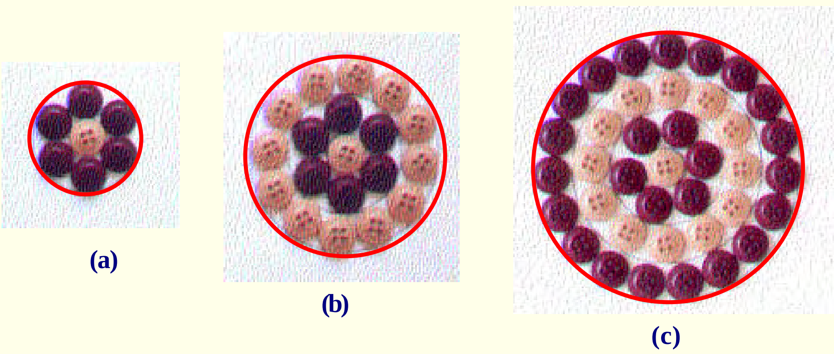


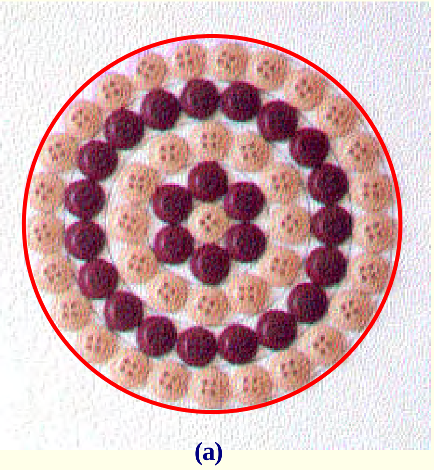
Figura 3.13

Sejam **d** o diâmetro do círculo maior e **D** o diâmetro do círculo menor.

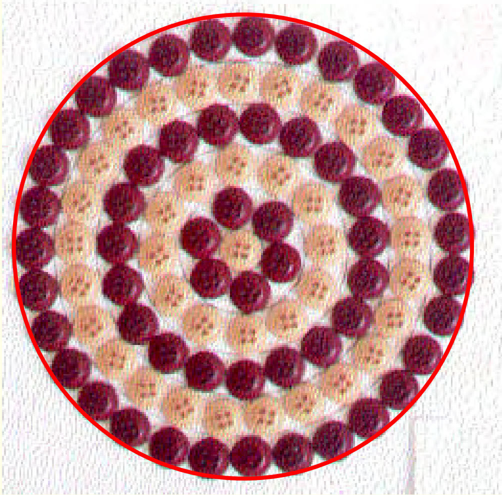
[66] Apesar de nas fotos da figura 3.12 terem sido utilizados botões, convém observar que as peças do jogo mancala são sementes sagradas.

Podemos considerar D = 1. Assim, as áreas dos círculos da figura 3.13 são respectivamente 7, 19, e 38.

Usando o método descrito acima é possível construir novos círculos com o acréscimo de novos anéis [Figura 3.14].



(a)



(b)

Figura 3.14

A área de tais círculos aparece numa tabela e pode ser verificada experimentalmente.

d	Área do círculo
1	1
3	1 + 6 = 7
5	1 + 6 + 12 = 19
7	1 + 6 + 12 + 19 = 38
9	1 + 6 + 12+ 19 + 25 = 63
11	1 + 6 + 12 + 19 + 25 + 31= 94

Se A(d) e A(D) são respectivamente as áreas dos círculos de diâmetros **d** e **D** então, observe que a área do círculo de diâmetro d = 9 é igual a

- $(1 + 6 + 12 + 19 + 25)\times A(D) = 63 \times A(D)$.

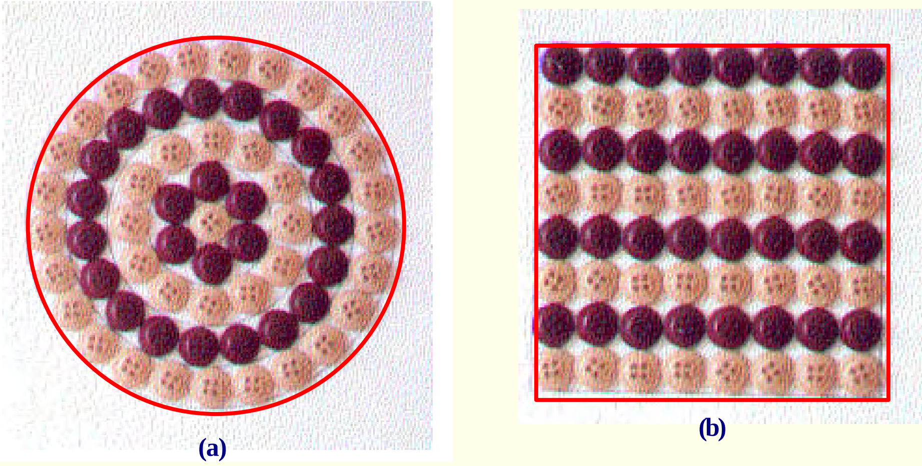
Assim,

- $A(d = 9) = 63 \times A(D) \cong 64 \times A(D)$.

Mas 64 é um quadrado perfeito

- $64 = 8^2$

e também é a área de um quadrado de lado 8. Portanto, é possível com os 64 círculos de diâmetros D = 1 cobrir um quadrado de lado 8. [Figura 3.15].



(a) (b)

Figura 3.15

Logo,

$$A(d = 9) = 64 = 82 = \ell^2$$

onde ℓ é o lado do quadrado.

$$\begin{aligned} \ell &= 8 \\ d &= 9 \end{aligned} \quad \rightarrow \frac{\ell}{d} = \frac{8}{9}$$

$$\ell = \frac{8}{9}d \quad \rightarrow A(d) = \ell^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

que é a fórmula egípcia.

5a. Explicação

Curvas do tipo espirais são utilizadas em alguns países da África para simbolizar serpentes. Estas curvas são gravadas em portas de madeira e aparecem naturalmente como resultado final da construção de esteiras e cestos. [Figura 3.16].

Figura 3.16

Este padrão espiral era um motivo comum na decoração de paredes de "locais de funeral". Ele também aparece no formato do tabuleiro do "jogo serpente" do Antigo Egito e do pão real.

O jogo *Mehen* ou jogo da serpente era um dos jogos de tabuleiro favoritos do Velho Reinado e é considerado, um dos mais antigos jogos de tabuleiro do mundo. Ele era jogado sobre um tabuleiro que tinha a figura de uma serpente enrolada e seu corpo dividido em quadrados. [Figura 3.17].

Figura 3.17

Formato semelhante ao do tabuleiro do "jogo da serpente" aparece na construção de esteiras espirais de sisal.

O processo de construção de tais esteiras sugere um outro modo para explicar a fórmula egípcia para o cálculo da área do círculo.

Este processo consiste em enrolar a corda em torno de um ponto fixo e costurar ao longo das espirais determinadas pelas laterais da corda. A extremidade final da tira é cortada e costurada de modo a dar à esteira a forma de um círculo. [Figura 12].

Supondo que os antigos egípcios sabiam fazer esteiras semelhantes, e que uma corda de sisal pode ser considerada como um retângulo, a área do círculo construído utilizando uma corda de sisal pode ser calculada como a área de um retângulo cujas dimensões lineares são o comprimento e largura da corda.

Podemos considerar como unidade de medida a largura da corda. Sejam ℓ o comprimento da corda necessária para construir um círculo de diâmetro **d**.

A tabela a seguir fornece o comprimento da corda e o diâmetro do círculo em função do número de voltas completas (**V**) dadas pela corda e pode ser verificada experimentalmente. [Figura 3.18].

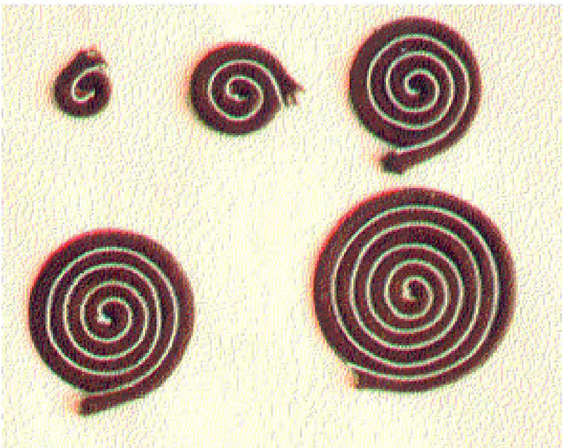


Figura 3.18

V	2	3	4	5	6
ℓ	7	20	39	64	95
d	3	5	7	9	11

Observando os resultados obtidos vemos que para d = 9, a área do círculo de diâmetro **d** é A = 64 = 8^2. Isto é, a área do círculo de diâmetro **d** é igual a área de um quadrado de lado n = 8.

Assim, temos:

$$\begin{matrix} d = 9 \\ n = 8 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \frac{n}{d} = \frac{8}{9} \quad \rightarrow \quad A = \ell = n^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

que é a fórmula egípcia.

Esta explicação e a anterior podem dar indícios da razão pela qual o escriba escolheu o valor d = 9 para resolver o problema do cálculo da área do círculo.

As tiras de sisal utilizadas pelos africanos podem ser substituídas por outros materiais encontrados facilmente em cada região do país, como por exemplo: cordas de sisal, de nylon, de algodão, etc. Materiais concretos podem ser criados para facilitar a construção da espiral e a medição do comprimento das tiras.

É importante observar que os egípcios não usavam o comprimento da circunferência para calcular a área do círculo[67].

A representação da área do círculo como igual a de um quadrado sugere uma solução geométrica para o problema e é um modo de encontrar uma solução aproximada para o problema da quadratura do círculo.[68]

[67] Katz, V. J. p. 20
[68] Katz, V. J. p. 20 , Knorr, W. R. p. 25

Podemos então afirmar que encontramos no papiro Rhind uma tentativa para quadrar o círculo.[69] Nesse caso, o escriba usa um octógono inscrito em um quadrado que aproxima a área do círculo inscrito no mesmo quadrado. Esse método não é semelhante a nenhum dos que aparecem nas tentativas conhecidas na Grécia Antiga para resolver o problema da quadratura do círculo.

Com relação ao método egípcio para calcular a área do círculo, Gillings vê nesse conjunto de 5 problemas um modo desenvolvido pelos egípcios de estabelecer uma fórmula geral a partir de poucos exemplos.

Para Gillings[70], um argumento para ser rigoroso não precisa ser simbólico e

> um argumento não simbólico pode ser rigoroso, mesmo quando dado para um valor particular (no caso considerar o diâmetro do círculo igual a 9). A única exigência é que o valor particular seja "típico" [9 é nesse caso um valor típico] e que a generalização para qualquer valor seja imediata [o que realmente acontece, como foi visto acima]. O rigor do argumento está implícito na dedução.

A discussão da solução dada pelos egípcios para o cálculo da área do círculo pode, entre outras coisas, servir como ponto de partida para uma reflexão sobre os diversos tipos de prova que aparecem na história da matemática e numa sala de aula de matemática. Não devemos portanto, apenas desprezar as soluções particulares que nossos alunos apresentam para casos gerais sem antes ter certeza de que sua solução não se enquadra nas características apresentadas acima.

De acordo com Wussing[71], "o cálculo da área do círculo no Egito Antigo se realizava, na maioria das vezes, com um valor aproximado de $\pi = 3$, embora, ocasionalmente, também com $\frac{p}{4} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$".

De fato, a aproximação de $\frac{p}{4}$ é uma conseqüência imediata da fórmula usada para resolver os cinco problemas do papiro Rhind discutidos nesse trabalho. A aproximação de $\pi = 3$ não é usada em nenhum dos problemas que, segundo Gillings, contém uma discussão egípcia sobre o problema do cálculo da área do círculo.

Visokolskis[72] faz uma reflexão sobre a existência de outras maneiras de fazer matemática que não sejam exclusivamente o modo de proceder dedutivo que, em princípio, podem ter se desenvolvido em outras sociedades antigas.

---

[69] Gillings, R. J. p. 145
[70] Gillings, R. J. p. 146
[71] Wussing, p. 20

Apresentar os modos de fazer matemática de outros grupos sociais como, por exemplo, o modo como os egípcios apresentam as soluções dos problemas relativos ao cálculo da área do círculo e as possíveis explicações para a fórmula usada por esta civilização, permitem uma reflexão sobre os modos de fazer matemática dos nossos alunos e pode vir a desenvolver no professor-aluno uma atitude mais receptiva no sentido de procurar entender estes modos e analisá-los buscando caminhos que valorizem a iniciativa dos alunos no sentido de buscarem seus próprios modos de resolverem problemas.

Os **babilônios** estavam familiarizados com a relação entre a área, a circunferência e o diâmetro do círculo.

- Encontramos na tábula YBC7302 uma aproximação para π igual a 3.
- Os babilônios, como os chineses, também calculavam a área do círculo pela fórmula exata

$$A = C\frac{d}{4} = \frac{C}{2}\frac{d}{2}$$

onde **C** é a circunferência[73].

- Ambos usam também a fórmula $A = \frac{C^2}{12}$, facilmente derivável da primeira substituindo d por $\frac{C}{3}$ e que comparada com a fórmula atual, conduz à aproximação[74] de $\pi = 3$.

De fato, o coeficiente babilônico para o círculo é $\frac{1}{12}$, indicando que a área é determinada pela multiplicação do quadrado da circunferência por este valor.

A fórmula $A = \frac{C}{2}\cdot\frac{d}{2}$ conectando a área do círculo com o comprimento da circunferência pode ser explicada de duas formas diferentes:

1ª. Explicação[75]: Considerando a divisão do círculo em setores e re-arranjando tais setores em um "retângulo" aproximado, conforme figura 3.19.

---

[72] Visokolski, p. 146
[73] Não sabemos como os chineses chegaram a esta fórmula.
[74] Em textos posteriores a aproximação para $p = 3\frac{1}{8}$ era usada. [Wussing, H. p. 23]
[75] Katz, V. J. p. 21

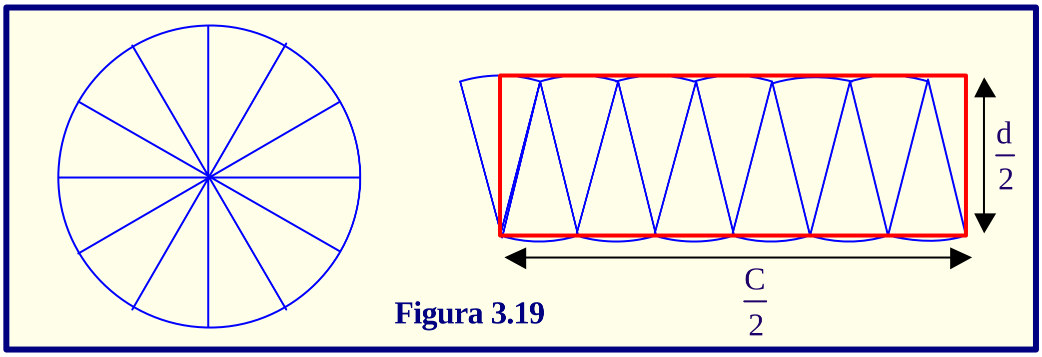


Figura 3.19

A área do círculo de diâmetro **d** seria aproximadamente igual à área do retângulo de lados $\frac{d}{2}$ e $\frac{C}{2}$ onde **d** é o diâmetro do círculo e **C** o comprimento de sua circunferência.

Logo, $A \cong \frac{d}{2} \cdot \frac{C}{2}$.

Essa explicação é conhecida dos professores de ensino fundamental e médio que a fazem com a utilização de material concreto. Eles tomam um círculo de cartolina; dividem em 6 ou 8 partes iguais; cortam ao longo de um diâmetro dividindo o circulo em dois semicírculos; cortam cada semicírculo nos raios que aparecem da divisão deixando-os presos por uma porção bem pequena desses raios; abrem os dois semicírculos e tentam encaixá-los de modo a formarem um "retângulo".

2ª Explicação[76]: Construção, com cordas de espessura infinitesimal, de uma família de círculos concêntricos com o círculo dado.

Se cortarmos esta família de círculos do centro para a circunferência de diâmetro **d** e abrirmos, [Figura. 3.20], a figura formada é um triângulo isósceles cuja base é o comprimento da circunferência e a altura é o raio do círculo.

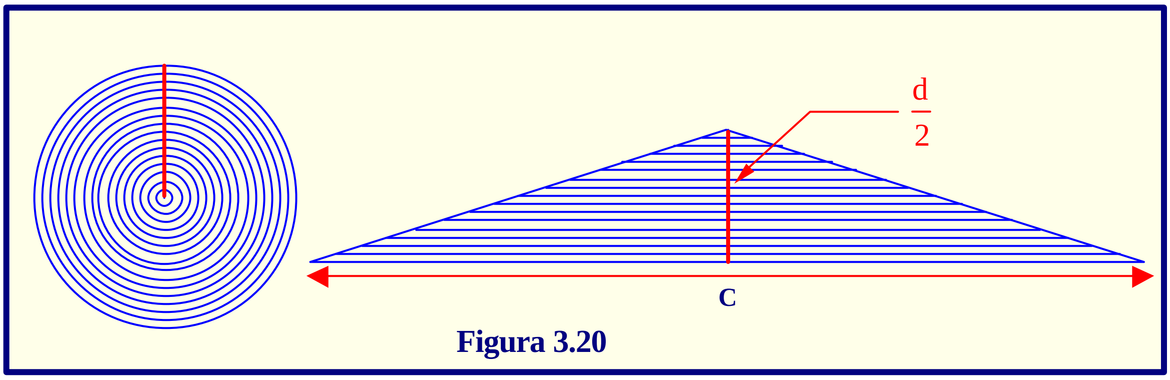


Figura 3.20

Assim,

$$A = \frac{1}{2}\left(C \cdot \frac{d}{2}\right) = \frac{C}{2} \cdot \frac{d}{2}.$$

[76] Tal explicação tem evidência textual na Idade Média. Katz, V. J. p. 21

Tal construção permite discutir a área do círculo como $\int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi s\, ds$.

Apesar de Knorr[77] dizer que o problema da quadratura do círculo tem remanescentes nas tradições do Egito Antigo e da Mesopotâmia desde o 2º milênio mediano a.C. ou ainda cedo, ele apresenta uma justificativa para sua afirmação com relação à tradição egípcia mas não com relação à da Mesopotâmia.

A dimensão histórica pode ser um componente motivador para promover oportunidades de investigação.[78] *A riqueza de atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula a partir da discussão do problema do cálculo da área do círculo pelas civilizações aqui estudadas como por exemplo, acompanhar a evolução histórica do problema da quadratura do círculo, pode ser um objeto de investigação a ser trabalhado por professores, ou grupo de professores. Cada professor em formação pode ser, por exemplo, responsável pela análise de uma solução observando todos os aspectos envolvidos na mesma época em que foi apresentada, quem a apresentou, que ferramentas matemáticas possuía, que novas ferramentas surgiram a partir de sua tentativa para resolvê-la, etc.*

3.4. Índice de Figuras

---

[77] Knorr, W. R. p. 25

[78] Fauvel, J.

3.5. Bibliografia

Africa-Galerie Für Africanische Kunst Disponível em: <www.africa.at/de/object.php?DE243> Acesso em: 10 jun. 2003.

Africa-Galerie Für Afrikanishe Kunst Disponível em: <www.africa.at/de/object.php?DE244> Acesso em: 10 jun. 2003.

Africa-Galerie Für Afrikanishe Kunst Disponível em: <www.africa.at/de/object.php?D20> Acesso em: 10 jun. 2003.

AMMA, S. T. A. **Geometry in Ancient and Medieval India** 1a. ed. Índia: Motilal Banarsidass, 1979. 280 p.

Arte. Artesania. Disponível em: <www.ikusa.com/Africa/arte_artesania.htm> Acesso em: 10 jun. 2003.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. **A Matemática Grega.** Tradução. J. P. Coelho. Brasília: Universidade de Brasília, 1985. 63 p. (Curso de História da Matemática. Origens e Desenvolvimeno do Cálculo.) v. 1 .

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução Elza Gomide. 2a. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996. 496 p.

BUNT, L. N. H.; JONES, P. S.; BEDIENT, J. D. **The Historical Roots of Elementary Mathematics** 1a. Dover ed. New York: Dover Publications Inc., 1988. 299 p.

BYERS, V. Por que Estudar a Históriada Matemática **International Journal Matematics Education, Science and Technologie**, v. 13, n. 1, p. 59-66, 1982.

CAJORI, F. **History of Mathematics** New York: Chelsea Publishing Company, 1991. 524 p.

CHILDE, V. G. Early Forms of Society. In: SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R. **A History of Technology. From Early Times to Fall of Ancien Empires.** Inglaterra: The Clarendon Press, 1958. 2. p. 38-57.

CHILDE, V. G. Wheeled Vehicles In: SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R. **A History of Technology.** 1a. ed. Inglaterra: The Clarendon Press, 1958. p. 716-729.

COSTA, M. H. F.; MALHAMO, H. B. Habitação indígena brasileira In: RIBEIRO, D. **SUMMA Etnológica Brasileira 2. Tecnologia Indígena..** 2a. ed. Petrópolis: Vozes, 1987. 1. p. 27-94.

DAHLKE, R., **Mandalas** . Tradução M. Martincic. 10 a. ed. São Paulo: Pensamento, 1995. 346 p.

ENGELS, H. Quadrature of the Circle in Ancient Egypt **Historia Mathematica**, v. 4, p. 137-140, 1977.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução Domingues, H. H. Campinas: UNICAMP, 1997. 843 p. (Repertórios.)

FAUVEL, J.; GRAY, J. (Ed.). **The History of Mathematics . A Reader** Hong Kong: Macmillam Press/The Open University, 1993. 628 p.

GERDES, P. **Sobre o Despertar do Pensamento Geométrico** 1986. Tese de Doutorado - Instituto Superior Pedagógico "Karl Friedrich Wilhelm Wander" de Dresden (RDA).

GERDES, P. Three Alternative Methods of Obtainting the Ancient Egyptian Formula of the Area of a Circle. **Historia Mathematica**, v. 12, p. 261-268, 1985.

GILLINGS, R J. **Mathematics in the time of the Pharaohs** New York: Dover Publications Inc., 1972. 288 p.

GRUBER, J. G. A arte gráfica Ticuna. In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 2a. ed. São Paulo: Nobel:EDUSP, 2000. p. 249-264.

HORNG, W-S. Euclid *versus* Liu Hui: A pedagogical refletion In: HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1996, Braga. **História e Educação Matemática. Proceedings. Actes. Actas. v. II.** Braga, 1996. p. 404-411.

IREM DE MONTPELLIER. **L'Espirit de Geometrie - 1a. parte** 1a. ed. Montpellier: Université Montpellier II. 89 p.

JOSEPH, G. G. **The Crest of The Peacock** 2a. ed. USA: Princeton University Press, 2000. 455 p.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics. An Introduction** 2a. ed. USA: Addison-Wesley Educational Publishers Inc., 1998. 856 p.

KATZ, V. J. Egyptian Mathematics In: HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1996, Braga. **História e Educação Matemática. Proceedings. Actes. Actas. v. I.** Braga, 1996. p. 45-53.

KNORR, W. R. **The Ancient Tradition of Geometric Problems** New York: Dover Publications Inc., 1993. 410 p.

LAY-YONG, L.;TIAN-SE, A. A Circle Measurements in Ancient China **Historia Mathematica**, v. 13, p. 325-340, 1986.

Long Bushoong Rafia Wrapping Textile Disponível em: <http://www.nigerbend.com/item.php3?key=140> Acesso em: 10 jun.2003.

Market Baskets Disponível em: <http://www.negerbend.com/catdir/catalog_15.php3> Acesso em: 10 jun. 2003.

MARTINEZ, A. **Pirâmide de Nechcheyet-Dyeser** Disponível em: <www.egiptologia.com/sociedad/piramides/dyeser/dyeser.htm> Acesso em: 10. jun. 2003.

MARTINEZ, A. **Piramide Keops (Jufu)** Disponível em: <www.egiptologia.com/sociedad/piramides/jufu/jufu.htm> Acesso em: 10 jun. 2003.

MARTZLOFF, J. C. **A History of Chinese Mathematics.** Tradução S. Wilson. 1a. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1997. 484 p.

MARYON, H.; PLENDERLEITH, H. J. Fine Metal-Work In: SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R. **A History of Technology. From Early Times to Fall of Ancient Empires.** Inglaterra: The Clarendon Press, 1958. 23. p. 621-662.

Matemáticas en Índia. Disponível em: <**http://matematicas.metropoli2000.com/codigo/historia/india/matematicas.htm**> Acesso em: 23 jun. 2000.

MIKAMI, Y. **The Development of Mathematics in China and Japan** 2a. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1910.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **The Indian Sulbasutras** Disponível em: <**http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Indian_sulbasutras.html**> Acesso em: 2 set. 2001.

Old Fulani Hats. Disponível em: <**http://www.negerbend.com/tribedir/catalog_32.php3**> Acesso em: 10 jun. 2003.

Old Rilied Figure Pots. Disponível em: <**http://www.negerbend.com/item.php3?key=312**> Acesso em: 10 jun. 2003.

O'NEALE, L. Cestaria. In: RIBEIRO, D. **SUMA Etnológia Brasileira. 2. Tecnologia Indígena.** 2a. ed. Petrópolis: Vozes, 1987. 10. p. 323-350.

PENNICK, N. **Geometria sagrada. Simbolismo e intenção nas estruturas religiosas.** Tradução A. Feltre. 9a. ed. São Paulo: Pensamento, 1999. 146 p.

PESSIS, A-M.; GUIDON, N. Pinturas Rupestres. Registros Rupestres e Caracterização das etnias Pré-históricas In: VIDAL, L. (Org.) **Grafismo Indígena.** 2a. ed. São Paulo: Studio Nobel:EDUSP, 2000. p. 19-33.

RIBEIRO, B. G. **Dicionário do Artesanato Indígena** São Paulo: EDUSP, 1988. 343 p.

RIBEIRO, D. Arte Indígena In: RIBEIRO, D. **SUMA-Etnológica Brasileira 3. Arte Indígena.** 2a. ed. Petrópolis: Vozes, 1987. 1. p. 29-64.

ROBINS, G.; SHUTE C. **The Rhind Mathematical Papyrus. An Ancient Egyptian Text** 1a. ed. New York: Dover Publications Inc., 1987. 60 p.

SARASVATI, S. S. P. **Geometry in Ancient India** Índia: Govindram Hasanand, 1987. 230 p.

SEIDENBERG, A. On the Volume of a Sphere **Archive for History of Exact Sciences**, Berlin, v. 39, n. 2, p. 97-119, Dezembro 1988.

SEIDENBERG, A. The Origin of Mathematics **Archive for History of Exact Sciences**, Berlin, v. 18, n. 4, p. 301-342, Junho 1978.

SEIDENBERG, A. The Ritual Origin of Geometry **Archieve for History of Exact Sciences.**, p. 488-527, 1963.

SERRES, M. **O Contrato Social.** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1991. 142 p. (Nova Fronteira Verde.)

SILVA, A. L. Xavante: Casa - Aldeia - Chão - Terra - Vida In: NOVAES, S. C. **Habitações Indígenas.** São Paulo: Nobel:EDUSP, 1983. p. 33-56.

SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R. (Ed.). **A History of Technology. Vol. 1. From Early Times to Fall of Ancient Empires.** Inglaterra: Oxford University Press, 1958. 827 p. v. 1.

SIQUEIRA JR., J. G. A Iconografia Kadiweu In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 1a. ed. São Paulo: Studio Nobel/EDUSP, 1992. p. 265-277.

SIU, M-K. Mathematics Ancient China. In: HSITÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1996, Braga. **História e Educação Matemática. Proceedings. Actes. Actas. v. I.** Braga, 1996. p. 54-65.

SKINNER, F. G. Measures and Weights In: SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R. **A History of Technology. From Early Times to Fall of Ancient Empires.** Inglaterra: The Clarendon Press, 1958. 30. p. 774-784.

VAN VELTHEM, L. H. Das Cobras e Lagartas: a Iconografia Wayana In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 1a. ed. São Paulo: Studio Nobel/EDUSP, 1992. p. 53-65.

VISOKOLSKIS, S. Intuiciones Geométricas y Percepción Visual em la Concepción Griega de la Matemática: Ser o No Ser In: HPM, 1994, Blumenau. **Proceedings.** Blumenau, 1994. p. 145-155.

WUSSING, H. **Lecciones de Historia de las Matemáticas** Madrid: Siglo XX de España Editores S. A., 1998. 345 p.

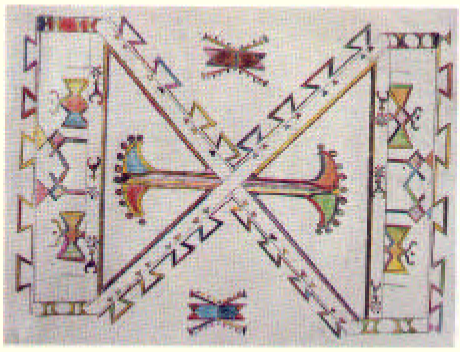
YAN, L.; SHÍRÀN, D. **Chinese Mathematics. A Concise History.** Tradução. J. N. Crossley; A. W.-C Lun. New York: Oxford Science Publications, 1987. 290 p.

4. O Trapézio Isósceles, a Pirâmide e o Tronco de Pirâmide

4.1. Introdução

A minha pesquisa sobre em que culturas o **trapézio** poderia ser encontrado na composição de alguns dos seus artefatos levou-me a identificar, entre os **indígenas brasileiros,** a forma trapezoidal

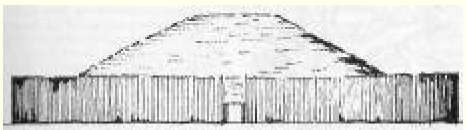
- Na sua arte [Figura 1.1]



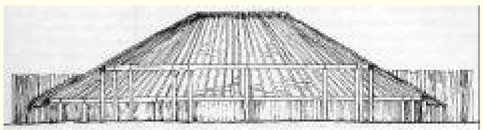
Pintura Yajé

Figura 1.1

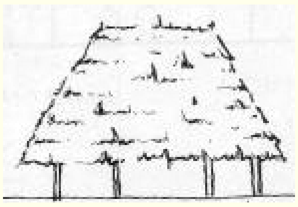
- Em suas habitações [Figura 1.2]



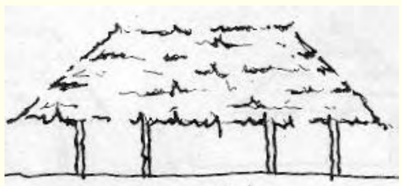
Aldeia-casa Yanomame



Aldeia-casa Yanomame

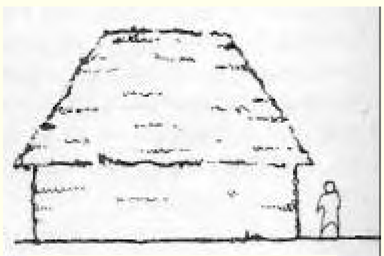


Casa Tiriyó



Casa Tiriyó

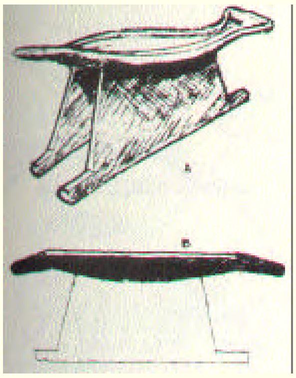
Casa Karajá
Corte Longitudinal



Casa Karajá
Fachada lateral

Figura 1.2

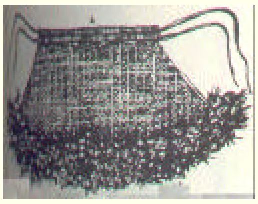
- Em alguns dos seus utensílios domésticos [Figura 1.3]



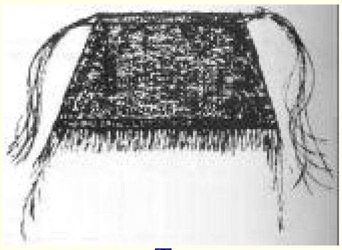
Banco ictiomorfo
Índios Aweti

Figura 1.3

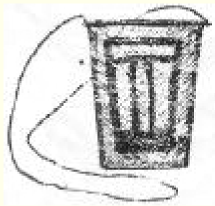
- Entre seus objetos de uso pessoal como bolsas, pingentes, tangas etc. Alguns destes objetos são de tecido, outros de palha ou de couro [Figura 1.4]



Tanga



Tanga



Pingente

Bolsa

Figura 1.4

- Na emplumação das flechas as penas são utilizadas de duas maneiras diferentes: inteiras ou divididas ao meio ao longo da nervura. As meias-penas são em geral retocadas apresentando diversas formas, entre elas a de um trapézio isósceles conforme Figura 1.5. Alguns autores sugerem que a função da pena é dar equilíbrio à flecha; outros que a técnica da emplumação é utilizada para controlar a trajetória da flecha.[1]

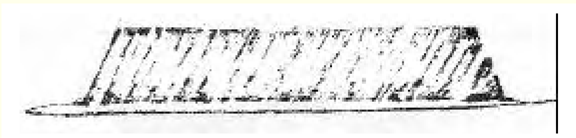


Figura 1.5

[1] Chiara, V. p. 131

Observe que em todos estes objetos a forma encontrada foi a do **trapézio isósceles**.

Na Antigüidade o **trapézio**, mais especialmente o trapézio isósceles, teve lugar de honra na religião Védica e na fé Jaina, e o interesse por esta figura geométrica continuou até à escola de Aryabhata.

No período Védico o interesse dos **indianos** pelo trapézio isósceles estava associado à ocorrência dessa figura em seus monumentos e altares [Figura 1.6] e, de acordo com Seidenberg, todas as esperanças dos indianos para saúde e riqueza estavam associadas ao trapézio[2]. Veremos neste capítulo que os *Sulbasutras* fornecem métodos geométricos para construir um trapézio, calcular sua área e transformá-lo em um retângulo ou quadrado de mesma área ou o inverso.

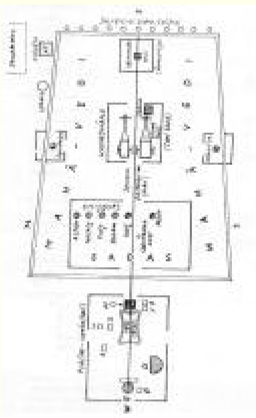


Figura 1.6

Segundo Gerdes, nos bazares moçambicanos vendem-se, por exemplo, tangerinas normalmente em conjuntos de quatro ou cinco. Para poder colocar organizadamente os frutos, sem ocupar demasiado espaço, eles são amontoados como mostra a figura 1.7. Esse mesmo método é encontrado em outros lugares da **África**, na Ásia, na América do Sul e esta experiência pode ter contribuído para a formação do conceito de tetraedros e **pirâmides** em degraus de base quadrada.[3] Em algumas regiões brasileiras essa prática é comum nas feiras livres para empilhar frutas.

---

[2] Seidenberg, A. p. 108; Amma, S. T. A. p 70

[3] Gerdes, P. p. 130

Figura 1.7

A estrutura de um tetraedro [Figura 1.8] – **pirâmide** de base triangular – é utilizada como tripé pelos indígenas brasileiros para apoiar o cesto-coador, que filtra o sumo venenoso da mandioca brava e outros líquidos[4].

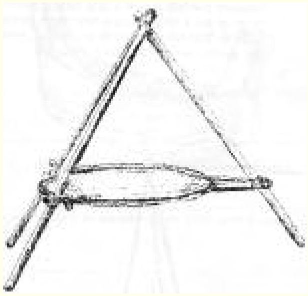


Figura 1.8

Existem cerca de 100 pirâmides na região de Qin Chuan na **China** com alturas variando entre 25 e 100 metros, exceto a "Grande Pirâmide Branca", [Figura 1.9] considerada a maior pirâmide do mundo com aproximadamente 300 metros de altura e cuja idade é de cerca de 4500 anos.

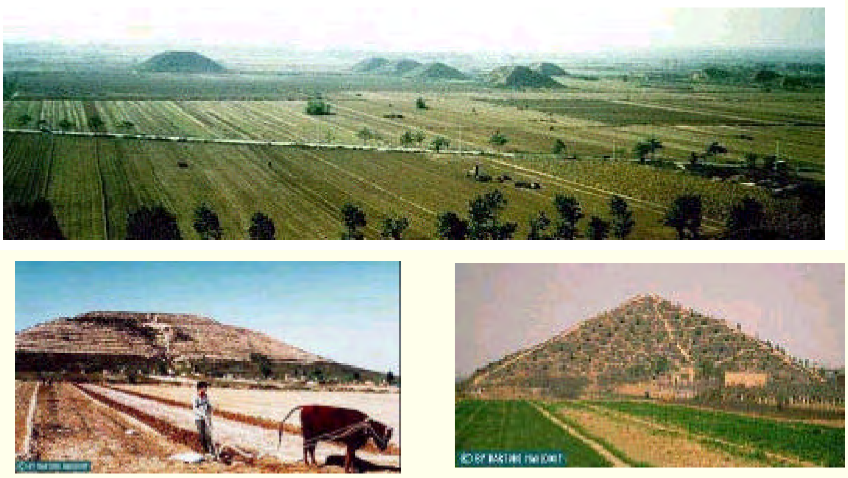


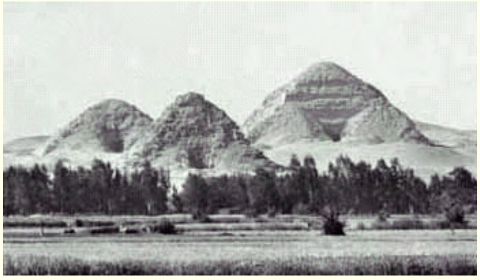
Figura 1.9

[4] Ribeiro, B. G. p. 276

Talvez as mais famosas e mais conhecidas de todas as construções arquitetônicas do antigo **Egito** sejam as pirâmides [Figura 1.10], a Grande Esfinge e o Templo de Karnak e, das cerca de 80 pirâmides, não existe dúvida de que a Grande Pirâmide de Quéopes, construída durante a 4ª. dinastia [c. 2644 a.C.], é uma das mais conhecidas e famosas[5]

As pirâmides egípcias e os templos são bem conhecidos. As pirâmides, em particular, foram construídas com um cuidado especial porque eram túmulos reais e os egípcios acreditavam que a construção feita de acordo com prescrições matemáticas exatas era essencial para a vida futura do morto. [6]

Pirâmide Escada



Pirâmides de Abusir

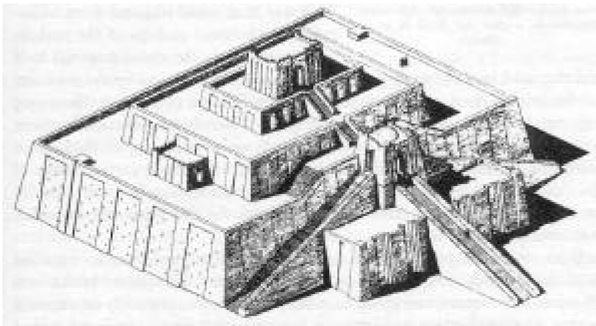
Grande Pirâmide de Giza

Figura 1.10

Toda grande cidade **Babilônia** construía um zigurate – templo em forma de torre. Este era um edifício imponente erguido no topo de uma sucessão de terraços parecido com degraus, e visível por milhas em volta. Um dos mais famosos é o zigurate em Ur datado de cerca de 2000 a.C. [Figura 1.11].

---

[5] Gillings, R. J. p. 236
[6] Kline, P. p. 39



Reconstrução do zigurate de Ur

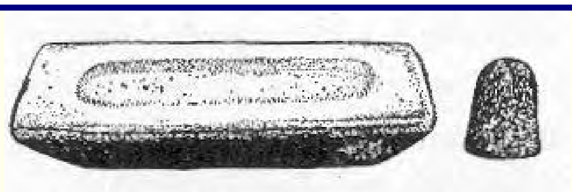
Figura 1.11

Se observarmos a figura 1.11, veremos que o zigurate de Ur era na realidade composto por uma série de **troncos de pirâmides**.

Troncos de pirâmides também são encontrados no formato de algumas “pirâmides” **chinesas** [Figura 1.12].

Figura 1.12

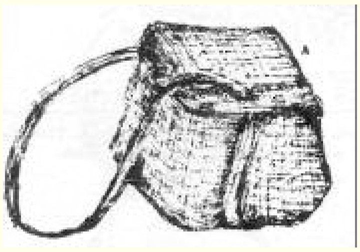
Entre os utensílios domésticos dos **egípcios** [Figura1.13]



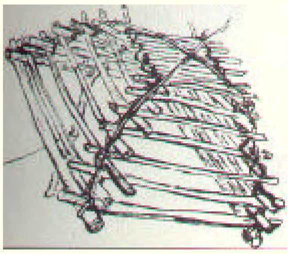
Utensílio para moer pigmentos

Figura 1.13

Nos objetos de uso pessoal e armadilhas dos **indígenas brasileiros** [Figura 1.14]



Bolsa



Armadilha

Figura 1.14

E na composição de algumas peças da cestaria dos **indígenas brasileiros** [Figura 1.15]

Figura 1.14

Veremos também, no decorrer deste capítulo. que encontramos no *Jiuzhang suanshu* **chinês** fatos básicos sobre pirâmides; que os métodos utilizados pelos **egípcios** do Médio Reinado, **babilônios** e **chineses** para calcular volume do tronco de pirâmide são equivalentes a aplicação da fórmula que utilizamos hoje para resolver este problema mas que as evidências com relação ao conhecimento dos babilônios sobre este assunto não são tão claras quanto se desejaria[7]. Todas estas civilizações e os indianos também conheciam modos de calcular a área do trapézio que equivalem a aplicação da fórmula atual.

4.2. O Trapézio

Veremos a seguir alguns dos resultados sobre o trapézio isósceles que são encontrados na geometria das civilizações aqui estudadas.

---

[7] Seidenberg, A. p. 108

4.2.1. Área de um trapézio:

Os *Sulbasutras* reconhecem que a área de um trapézio isósceles é igual à metade da soma da base e do topo multiplicada pela altura.[8]

No Apastamba *Sulbasutra* (V , 7), o *vedi* – altar empregado nos sacrifícios *Soma* – um trapézio isósceles com 36 unidades de altura e lados paralelos de 30 e 24, é dito ter área de 972 unidades quadradas.[9]

"(Para estabelecer isto), desenhe (uma linha) do sul amsa (D na figura 2.1) até o sul sroni (C), (a saber) para (o ponto E que é) 12 (padas do ponto L de prsthya). Após o que giramos a peça cortada (ie. O triângulo DEC) e levamos para o outro lado (ie. para o norte). Então o vedi obtém a forma de um retângulo. Nesta forma (FBED) calculamos sua área."

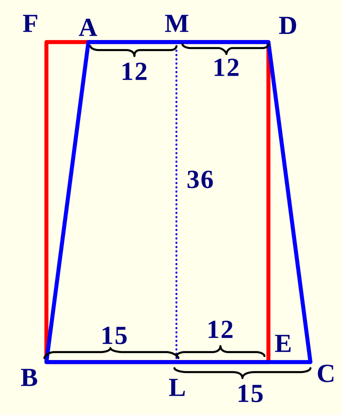


Figura 2.1

Muitos escritores dos *Sulbasutras* afirmam que não havia nenhuma prova nele mas, para Seidenberg, isto é uma prova e existem outras deste tipo nos *Sulbasutras*[10].

A solução dada pelos indianos pode ser re-escrita da seguinte forma:

- Construir uma perpendicular a BC passando pelo ponto D. [Figura 2.1]

Essa perpendicular intercepta BC em E e, a distância de E a L é igual a 12 unidades.

- Girar DEC e levar para o outro lado fazendo coincidir os pontos D com B e C com A de modo que o ponto A fique entre F (nova posição do ponto C) e D.
- FDEB é um retângulo que tem a mesma área do trapézio ADEB.

[8] Amma, S. T. A. p. 52
[9] Sarasvati, S. S. P. p. 109; Seidenberg, A. p.518
[10] Seidenberg, A. p.518

- Logo, área(ADEB) = área(FDEB) = $36 \times 27 = 972$.

A análise desta solução apresentada pelos indianos permite deduzir a fórmula geral para a área de um trapézio isósceles como $\frac{(B+b)h}{2}$. [Figura 2.2]

De fato,

$$\text{área(ADCB)} = \text{área(FDEB)} = (x + b)h$$

Mas, $x = \frac{B-b}{2}$

Logo, área(ADCB) = $\frac{B+b}{2}h$

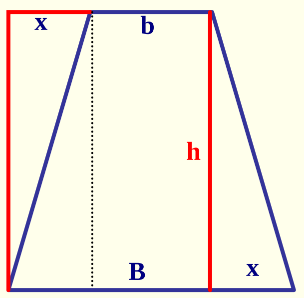


Figura 2.2

Que é a fórmula conhecida para a área do trapézio.

A discussão desse método ***indiano*** *para calcular a área de um trapézio isósceles permite discutir vários resultados da geometria plana, a saber:*

- *Cálculo da área de um trapézio;*
- *Construção de um retângulo de mesma área que a de um trapézio dado;*
- *Congruência cateto-hipotenusa para triângulos retângulos.*

No problema 52 do papiro **egípcio** Rhind [Figura 2.3] a área de um triângulo "truncado" ou seja, um trapézio, é obtida pela multiplicação da média aritmética da base e "corte dos lados" pela altura[11].

Este procedimento nos induz a um método para chegar à fórmula da área do trapézio a partir da área do triângulo, que era conhecida pelos egípcios. A saber,

[11] Robins, G.; Shute, C. p. 47

Considere um trapézio qualquer ABCD cujas bases paralelas são AB e CD respectivamente. [Figura 2.3].

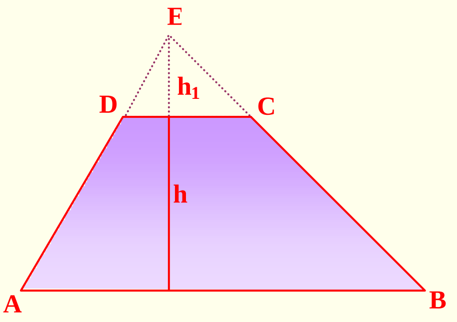


Figura 2.3

O trapézio ABCD pode ser obtido cortando o triângulo ABE por uma reta paralela a AB passando pelos pontos D e C dos lados AE e BE do triângulo.

Se **h** e **h_1** são as alturas do trapézio ABCD e do triângulo DEC relativa à base DC respectivamente, temos que:

- A altura do triângulo ABE é $h + h_1$
- A área do trapézio ABCD = área AEB – área DEC

Mas ,

$$\text{área de AEB} = \frac{AB(h_1 + h)}{2} \quad \text{e área de DEC} = \frac{DC}{2}h_1$$

Logo,

Área do trapézio

$$ABCD = \frac{AB(h_1 + h)}{2} - \frac{CD}{2}h_1$$

Pela semelhança dos triângulos ABE e DCE:

$$\frac{h_1}{h + h_1} = \frac{CD}{AB} \rightarrow h_1 = \frac{CD}{AB}(h + h_1) \rightarrow \left(1 - \frac{CD}{AB}\right)h_1 = \frac{CD}{AB}h \rightarrow h_1 = \frac{CD}{AB - CD}h$$

Mas,

$$\text{Área do trapézio ABCD} = \frac{1}{2}\left[AB\left(\frac{CD}{AB - CD}h + h\right) - CD\left(\frac{CD}{AB - CD}\right)h\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[\frac{AB\cdot CD + AB^2 - AB\cdot CD - CD^2}{AB - CD}\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[\frac{(AB - CD)(AB + CD)}{AB - CD}\right]$$

$$= \frac{AB + CD}{2}h$$

que é uma fórmula aplicada atualmente para calcular a área do trapézio.

É interessante que os futuros professores conheçam como um tópico da geometria era visto por várias culturas ou sociedades e do significado que este assunto tinha para cada uma delas e comparar o significado e importância deste tópico em nossa sociedade; na época em que ele – futuro professor – estudou este assunto e atualmente. Isso ajudará a priorizar determinados tópicos do currículo de matemática no momento de sua prática e entender melhor a atitude dos seus alunos com relação ao assunto a ser estudado. Assim, a história da geometria pode nos ajudar na construção do programa a ser desenvolvido em uma determinada série e na tomada de decisão quanto ao nível de profundidade e de relevância de um determinado tópico.

No *Jiuzhang suanshu* [**China**], o primeiro capítulo intitulado *fang-t'ien* ou "medida de campos" contém regras para medir campos de várias formas, tais como a triangular, quadrangular, circular, segmento de círculo, anel, etc. A regra para calcular a área de um trapézio isósceles ou um qualquer [campo inclinado, campo na forma de uma pá de lixo] é multiplicar a metade da soma das duas bases pela altura[12].

A área do trapézio também era calculada pelos **babilônios** usando a mesma fórmula que usamos hoje[13].

Ainda com relação às áreas de trapézios, na primeira edição do seu livro *Science Awakening*, Van der Waerden menciona o problema babilônico[14] que consiste em:

*Achar o comprimento de uma paralela **x** as bases **a** e **b** de* um *trapézio que divide a área do trapézio em duas partes iguais.*

A solução dada pelos babilônios que equivale a aplicar a fórmula

$$x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

---

[12] Mikami, Y. p. 10; Yan, L.; Shíràn, D. p. 41
[13] Seidenberg, A. p. 108
[14] Seidenberg, A. p. 308

pode ser obtida como segue:

- Considerar um trapézio ABCD [Figura 2.4] de bases **a** e **b** e seja x a medida do segmento paralelo às bases que divide o trapézio em dois trapézios de mesma área;

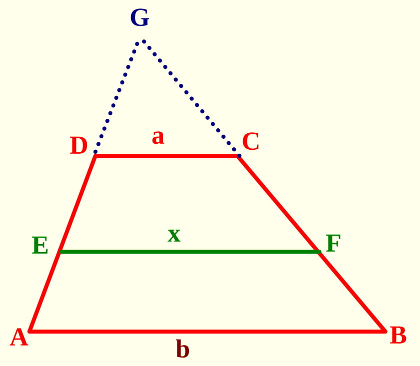


Figura 2.4

- Completar o trapézio ABCD para formar o triângulo ABG e sabendo que área(ABFE) = área(EFDC) temos:

$$\text{área}(ABCD) = \text{área}(ABG) - \text{área}(DCG)$$

$$\text{área}(EFCD) = \text{área}(EFG) - \text{área}(DCG)$$

- Como área(ABCD) = área(ABEF) + área(EFDC) = 2 área(EFDC) segue que

$$\text{área}(ABCD) = \text{área}(ABG) - \text{área}(DCG)$$

$$\text{área}(ABCD) = 2[\text{área}(EFG) - \text{área}(DCG)]$$

- Subtrair a primeira equação da segunda temos:

$$0 = 2\,\text{área}(EFG) – \text{área}(ABG) – \text{área}(DCG)$$

$$\text{área}(EFG) = \frac{1}{2}[\text{área}(ABG) + \text{área}(DCG)]$$

- Da semelhança dos triângulos ABG, EFG e DCG segue que:

$$\begin{matrix} \dfrac{\text{área}(ABG)}{\text{área}(EFG)} = \dfrac{b^2}{x^2} & & \text{área}(ABG) = \dfrac{b^2}{x^2}\text{área}(EFG) \\ & \rightarrow & \\ \dfrac{\text{área}(DCG)}{\text{área}(EFG)} = \dfrac{a^2}{x^2} & & \text{área}(DCG) = \dfrac{a^2}{x^2}\text{área}(EFG) \end{matrix}$$

➢ Assim,

$$\text{área}(EFG) = \frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{x^2} + \frac{a^2}{x^2}\right]\text{área}(EFG) \rightarrow 1 = \frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{x^2} + \frac{a^2}{x^2}\right] \rightarrow x^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$$

É importante observar que os babilônios conheciam algumas propriedades relativas a triângulos semelhantes.

Também encontramos no Livro V do *Jiuzhang suanshu* e no texto **babilônico** BM85194 problemas sobre volumes de represas e muralhas e o cálculo do número de trabalhadores necessários para construí-las. Em muitos destes problemas, tanto chineses quanto babilônios, a seção transversal é um trapézio e *o* "volume é calculado como o comprimento vezes a área da seção transversal". [15]

Podemos perceber assim que um dos métodos utilizados pelos chineses e babilônios para calcular volumes é de multiplicar a área da seção transversal pelo comprimento.

Esse método de calcular o volume como o comprimento vezes a área da seção transversal não é tratado no ensino médio, o que limita o cálculo de volumes a apenas sólidos que têm uma base e uma altura. Por outro lado, os alunos vêem esse método nos cursos de cálculo diferencial e integral não se fazendo uma relação entre o que ele está vendo nos cursos de cálculo e sua aplicação na geometria do segundo grau. Vemos aqui também uma relação com o Princípio de Cavalieri.

4.2.2. Construção de Trapézios

Os seguintes problemas sobre construção de trapézios são encontrado nos *Sulbasutras*:

Problema 1: Transformar um retângulo ou quadrado em um trapézio de mesma área com a base menor dada.

O *Baudhayana Sulbasutra* apresenta a seguinte solução[16]:

चतुरश्रमेकतोऽणिमच्चिकीर्षन् अणिमतः करणीं तिर्यङ्मानीं कृत्वा शेषमक्ष्णया विभज्य विपर्यस्येतरत्रोपदध्यात् ।

(*B. Sl.* I. 55)

Figura 2.5

"Se você deseja fazer *um quadrado ou retângulo menor em um lado, deve cortar a porção do lado menor. O resto deve ser dividido pela diagonal, invertido e atado ao outro lado."*

Isto sugere a seguinte construção:

- Considerar o retângulo ABCD [Figura 2.6];

---

[15] Seidenberg, A. p. 112
[16] Amma, S. T. A. p. 38

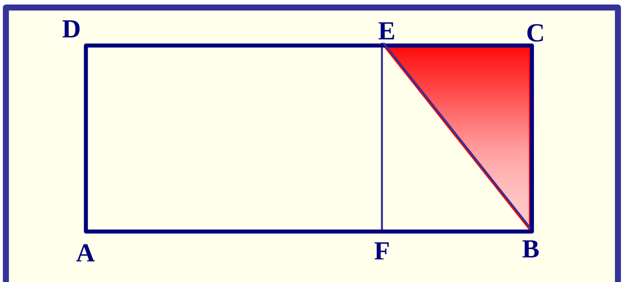


Figura 2.6

- Seja DE o tamanho do lado menor e EF uma perpendicular a AB;
- Traçar a diagonal EB;
- Os triângulos EFB e ECB têm a mesma área;
- Inverter o triângulo EBC e transfira-o fazendo coincidir o lado BC com DA [Figura 2.7];

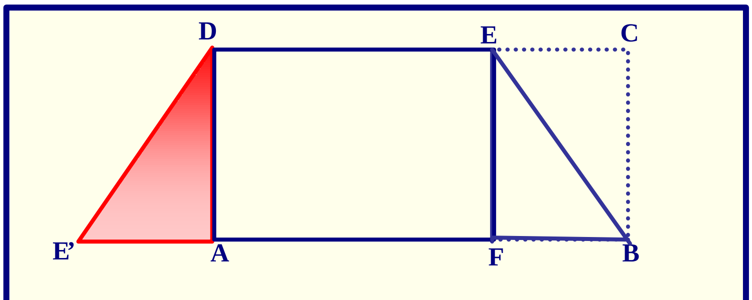


Figura 2.7

- O trapézio E'BED tem mesma área do retângulo ABCD.

O *Satapatha Brahmana* fornece outro método para esta conversão que pode ser descrito como segue[17]:

A face do quadrado ABCD é encurtada de modo que DD'= CC' e a base é alongada no mesmo comprimento [Figura 2.8], ficando A'A= BB'.

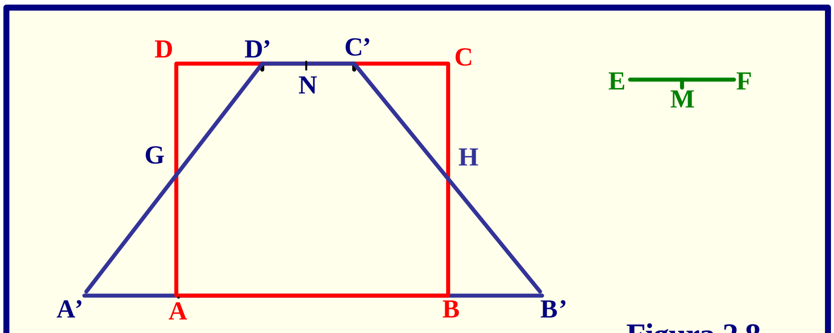


Figura 2.8

[17] Amma, S. T. A. p. 39

O procedimento pode ser descrito como segue:

- Seja ABCD o quadrado que será transformado em um trapézio de lado menor EF dado.
- Dividir EF ao meio por um ponto M.
- Marcar D'e C'sobre DC de modo que ND' = C'N = EM e DD' = CC'.
- Marcar A' e B'sobre AB tais que A'A = BB' = EM
- O trapézio A'D'C'B' tem base menor D'C' = EF e mesma área do quadrado ABCD.

De fato, os triângulos DD'G, AA'G, CC'H e BB'H são congruentes [ALA] e portanto possuem a mesma área.

Além disso, G e H são pontos médios de AD e BC.

As duas construções podem ser feitas com régua e compasso.

Observe que as construções acima são de trapézios isósceles.

Problema 2. *Transformar um trapézio em um retângulo equivalente.*

O *Apastamba Sulbasutra* trata deste problema mas não apresenta uma solução geral mas como um meio de achar a área do trapézio de *Mahaved*[18]*i* [Figura 2.9].

दक्षिणस्मादंसाद् द्वादशसु दक्षिणस्यां श्रोण्यां निपातयेत्, छेदं विपर्यस्य उत्तरत उपदध्यात् । सा दीर्घा चतुरस्रा । तथायुक्तां संचक्षीत ।

Figura 2.9

"Da quina superior sul baixe uma perpendicular até a inferior sul a uma distância de 12 (padas de prsthya). O pedaço removido deve ser colocado invertido no lado norte. Este é o retângulo. A pessoa deveria examiná-lo então unido."

Isto é, para transformar um trapézio ABCD (de lados 24 e 30) em um retângulo, deve-se proceder do seguinte modo:

- Desenhar uma perpendicular CB' [quina superior sul] a AB estando a 12 padas de PQ, o *prsthya*. [Figura 2.10]

[18] Amma, S. T. A. p. 39

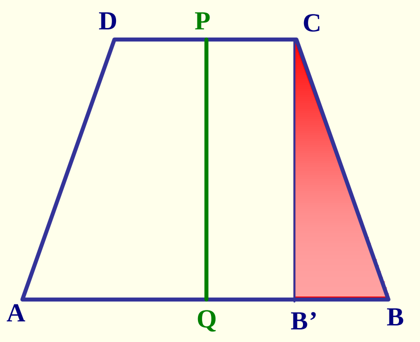


Figura 2.10

- Colocar o triângulo B'CB na posição ADD'.[Figura 2.11]

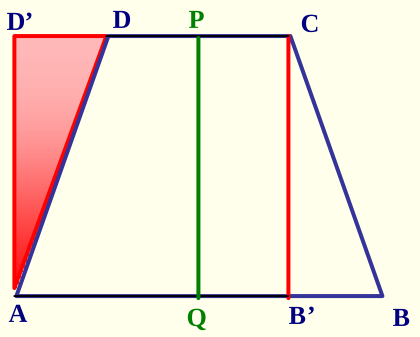


Figura 2.11

Então a área do retângulo AB'CD'é igual à do trapézio ABCD.

Observe que o método descrito acima permite transformar um trapézio isósceles em um retângulo independentemente de quais sejam suas medidas.

Problema 3: Construção da base do altar *smasana* (um altar no qual uma bebida chamada *soma* era oferecida como um sacrifício aos deuses).[19] Sua base tinha que ser construída com dimensões precisas para que o sacrifício desse bons frutos.

A base do altar *smasana* é um trapézio ABCD onde AD e BC medem 24 e 30 *padas* [pés] e a altura 36 *padas*. [Figura 2.12]

[19] Joseph, G. G p. 313

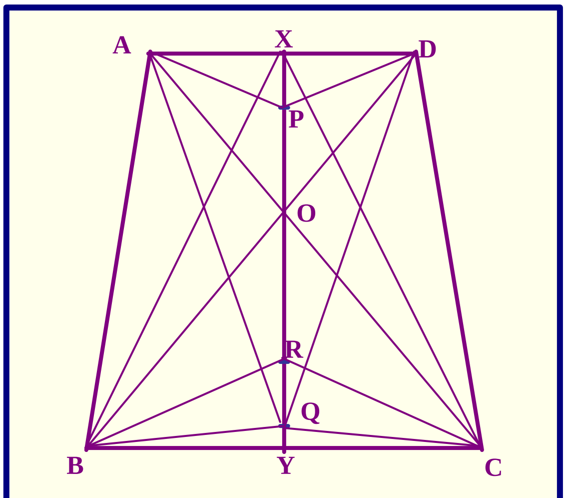


Figura 2.12

As instruções para construção deste altar no Apastamba *Sulbasutra* pode ser descrita, em notação moderna, como segue:

- Com a ajuda de uma corda marcar XY, que mede exatamente 36 *padas*.

Ao longo desta linha localizar os ponto P, R e Q tais que XP, XR e XQ sejam iguais a 5, 28 e 35 *padas*, respectivamente. [Figura 2.13]

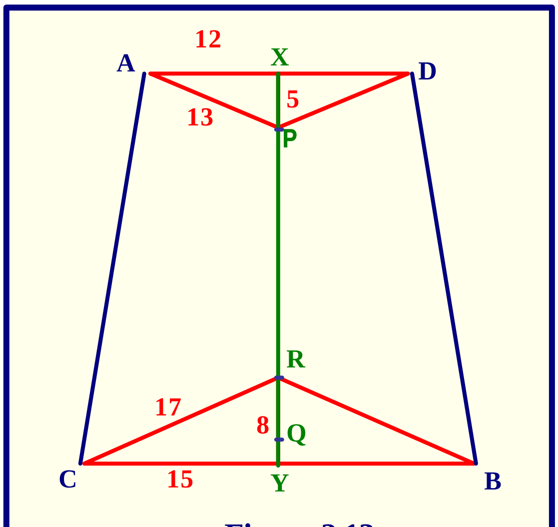


Figura 2.13

- Construir as perpendiculares a XY passando por X e por Y.

Essas perpendiculares podem ser construídas usando dois dos pontos P, Q ou R e o teorema de Pitágoras:

De fato,

- Se A e D são os vértices do trapézio a ser construído que estão sobre a perpendicular a XY passando por X.

$$XA = XD = 12 \textit{ padas}$$

- Logo, os triângulos XAP e DXP são retângulos com catetos medindo 12 e 5 *padas*. As hipotenusas AP e DP medem portanto,

$$AP = DP = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

Logo, para construir a perpendicular a X basta pegar uma corda de comprimento 12 + 5 + 13 *padas*; fazer marcas a uma distância 5 e 12 de cada uma das extremidades; fixar as extremidades da corda em X e Y e esticá-la pela marca 12 que tocará o solo no ponto A desejado. De modo análogo encontra-se D.

Para construir a perpendicular BC a Y podemos trabalhar com o terno pitagórico (8 = RY, 15 = YB = YC, $\sqrt{15^2 + 8^2} = 17 = RB = RC$).

Observe que para construir o trapézio ABCD bastam dois dos pontos P, Q e R. Na discussão acima os pontos P e R foram suficientes para construir o trapézio.

A discussão do altar smasana permite levantar algumas questões sobre o trapézio que podem ser discutidas em um curso de formação de professores levando-os a perceberem, entre algumas das propriedades do trapézio, que:

- *O ponto O de interseção das diagonais de um trapézio isósceles está na mediatriz do das bases AB e CD;*
- *A que distância O a cada uma das bases do trapézio.*
- *Se o trapézio não for isósceles O está na reta que liga os pontos médios das bases.*
- *Dado um trapézio ABCD qualquer, com base AD e BC , se M e N são os pontos médios das bases AD e BC respectivamente, O o ponto de encontro das diagonais e P e Q os pontos de interseção dos triângulos [Figura 214] , então O pertence a PQ que é paralela a AD e BC.*

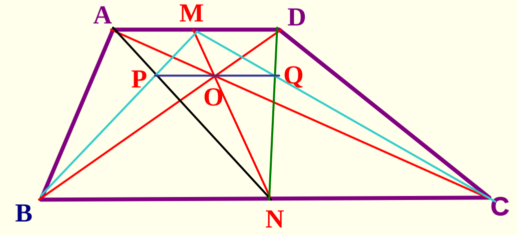


Figura 2.14

4.2.3. Considerações finais sobre o trapézio:

Nos textos gerais de história da matemática da bibliografia consultada, pouquíssimas referências são feitas ao trapézio e nenhuma sobre o interesse dos antigos indianos por esta figura.

Smith afirma que os babilônios, já em 1500 a.C., sabiam como calcular a área de um trapézio e Boyer discute o problema 52 do papiro Rhind chamando a atenção de que

> Em transformações como essa, em que triângulos e trapézios são transformados em retângulos, vemos o início de uma teoria de congruências e da idéia de prova em geometria, mas os egípcios não foram além.[20]

Com relação ao interesse dos indianos pelo trapézio, o mais antigo trabalho **Jaina** a tratar sobre o trapézio é o *Jyotiskarandaka*, provavelmente codificado no conselho *Valabhi* do século IV ou VI. A referência não é diretamente sobre o trapézio mas sobre o cálculo do diâmetro a qualquer altura de uma montanha na forma de um tronco de cone. Como as seções verticais deste sólido são trapézios isósceles, isto equivale a calcular as bases de qualquer seção de um trapézio. O diâmetro em uma altura h_1 é dado por

$$a + \frac{b-a}{h} h_1$$

onde **a** e **b** são os diâmetros das bases e h é a altura total da montanha[21].

De fato, considere um tronco de cone de diâmetros das bases **a** e **b** e altura **h** e seja **c** o diâmetro da base superior do tronco de cone a uma altura $\mathbf{h_1}$ da base. [Figura 2.15]

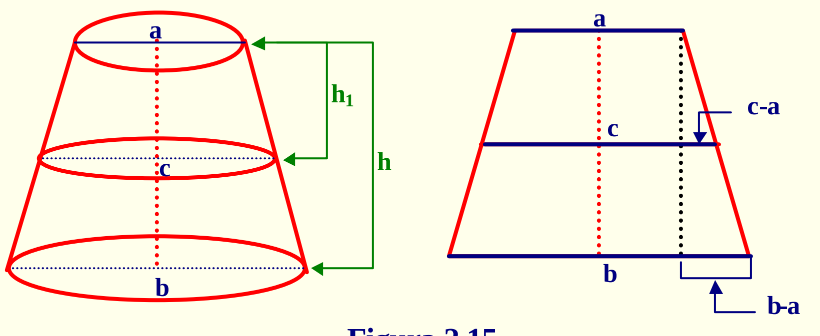


Figura 2.15

Considere a seção de corte do tronco de cone passando pelos diâmetros. Tal seção é um trapézio isósceles com bases **a** e **b** e altura **h.** [Figura (2.15)]

---

[20] Smith, D. E. p. 40; Boyer, C. B. p. 12
[21] Amma, S. T. A. p. 70

Por semelhança de triângulos temos:

$$\frac{h}{h_1}=\frac{b-a}{c-a} \rightarrow \frac{h}{h_1}(c-a)=b-a \rightarrow hc=ha+(b-a)h_1 \rightarrow c=a+\frac{b-a}{h}h_1$$

O único verso do **Aryabhativa** que trata do trapézio é:

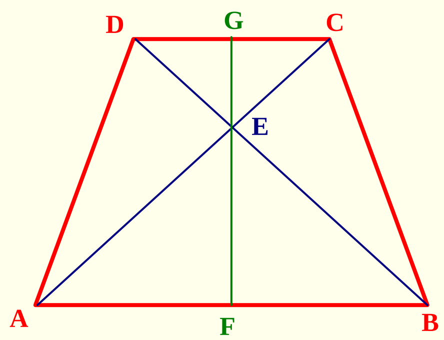
आयामगुणे पार्श्वे तद्योगहृते स्वपातरेखे ते । विस्तरयोगार्धगुणे ज्ञेयं क्षेत्रफलमायामे ।

(*Gaṇitapāda* 8)

Figura 2.16

Este verso contém duas informações sobre o trapézio isósceles:

Dado um trapézio isósceles ABCD [Figura 2.17], temos que:



$$EG=\frac{DC}{AB+DC}GF$$

$$EF=\frac{AB}{AB+DC}GF$$

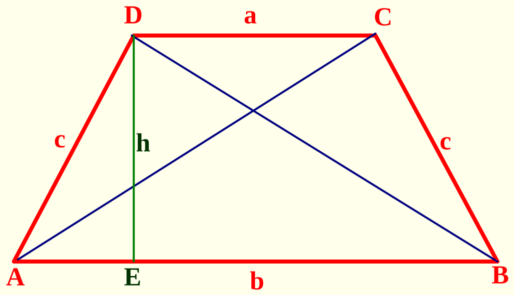
Figura 2.17

A área é: $\frac{AB+DC}{2}GF$ que é a fórmula usual para o cálculo da área de um trapézio.

O Brahmagupta não dá a expressão para a área do trapézio, mas observa algumas de suas propriedades. A saber,

Em quadriláteros diferentes do *Visama* a raiz quadrada da soma do produto dos lados opostos é a diagonal. O quadrado da diagonal menos o quadrado da semi-soma das bases é a altura.

No caso do trapézio isósceles se **a**, **b**, **c** são os seus lados, [Figura 2.18], temos que:



$$BD^2 = AC^2 = ab + c^2$$

$$h^2 = BD^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Figura 2.18

De fato, pelo teorema de Pitágoras,

$$\begin{array}{l} BD^2 = DE^2 + EB^2 \\ AD^2 = DE^2 + AE^2 \end{array} \rightarrow BD^2 = AD^2 + EB^2 - AE^2$$

Mas,

$$AE = \frac{b-a}{2} \text{ e } BE = \frac{a+b}{2}$$

Logo,

$$BD^2 = c^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = c^2 + ab$$

Além disso,

$$h^2 = BD^2 - EB^2 = BD^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Os quadriláteros e, em particular o trapézio, foram também estudados por Sridhra, Mahavira, Ariabhata , Sripati e Bhaskara II e Narayana Pandita que apresentaram métodos para o cálculo da área ou relações entre as medidas dos elementos [diagonais, lados] destas figuras geométricas. Encontramos entre estas figuras também trapézios não isósceles. [22]

Após a escola Ariabhata, não é dada muita atenção, na Índia, ao trapézio.

[22] Para mais detalhes consultar Amma, S. T. A. p.70- 80

4.3. Pirâmides

No início deste capítulo vimos que os egípcios, chineses e babilônios construíram inúmeras pirâmides e troncos de pirâmides na antigüidade. É de se esperar, portanto, que a geometria desenvolvida por estas civilizações contenha alguns resultados sobre estes sólidos[23].

No capítulo 5 do *Jiuzhang suanshu*, intitulado *Shang Kung*[24] [**China**] os primeiros sete problemas são práticos e dizem respeito a volumes de paredes e represas e o número de trabalhadores necessários para os propósitos da construção. Depois segue uma seqüência de problemas teóricos sobre volumes de sólidos.

Neste capítulo, encontramos regras para calcular o volume de algumas formas tridimensionais que seriam familiares aos construtores de castelos, mansões e canais.[25]

Para calcular volumes de sólidos, o comentarista do *Jiuzhang suanshu*, Liu Hui, utiliza quatro tipos de sólidos elementares chamados: o *lifang*[26] [cubo], o *quiandu*, o *yangma* e o *bienuam*.[27]

Podemos, a partir do cubo [*lifang*], obter os demais sólidos elementares do seguinte modo:

- Interceptar o *lifang* com um plano que contém a diagonal de duas faces opostas, este fica dividido em duas pirâmides congruentes chamadas de *quiandu*.[Figura 3.1]

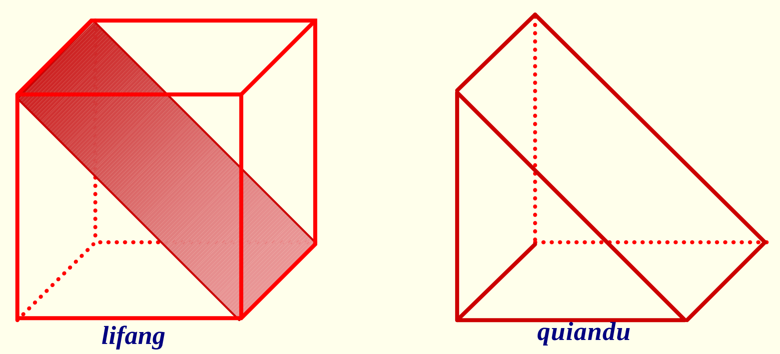


Figura 3.1

- Assim, 1 *lifang* = 2 *qiandu*

---

[23] van der Waerden, B. L. p. 20
[24] Texto de consulta para engenheiros. Joseph, G. G. p. 233
[25] Joseph, G. G. p. 233
[26] No comentário de Liu Hui o termo *lifang*, cujo significado geral é "cubo" denota, mais geralmente, um paralelepípedo retangular. Martzloff, J. C. p. 283
[27] Martzloff, J. C. p. 282. É provável que esses termos estejam associados a nomes de objetos reais, embora não se saiba quais.

- Interceptar o prisma *qiandu* com o plano determinado pela diagonal da face lateral e da face não perpendicular à base do *qiandu*, obteremos a pirâmide *yangma* e a *bienuan*. [Figura 3.2]

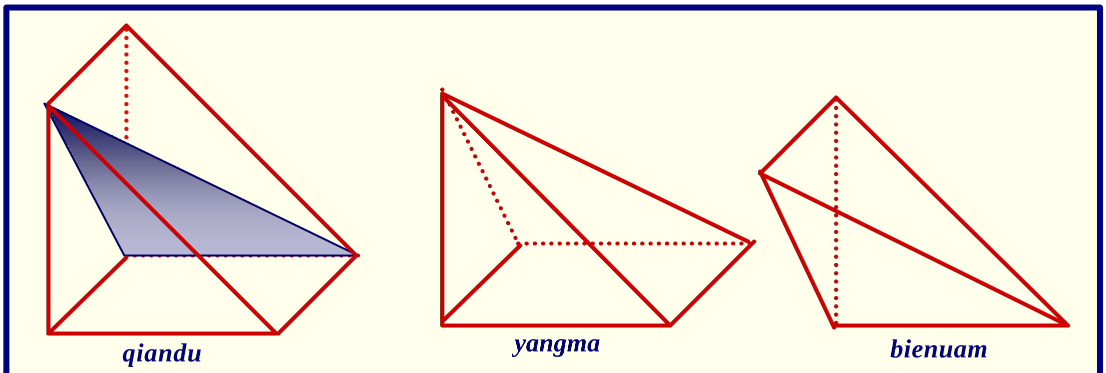


Figura 3.2

- Assim, 1 *qiandu* = 1 *yangma* + 1 *bienuam*
- Finalmente, se interceptarmos a pirâmide yangma com um plano que contém a diagonal da base e o vértice que não pertence à base, obteremos a pirâmide *yangma* e a *bienuan*. [Figura 3.3].

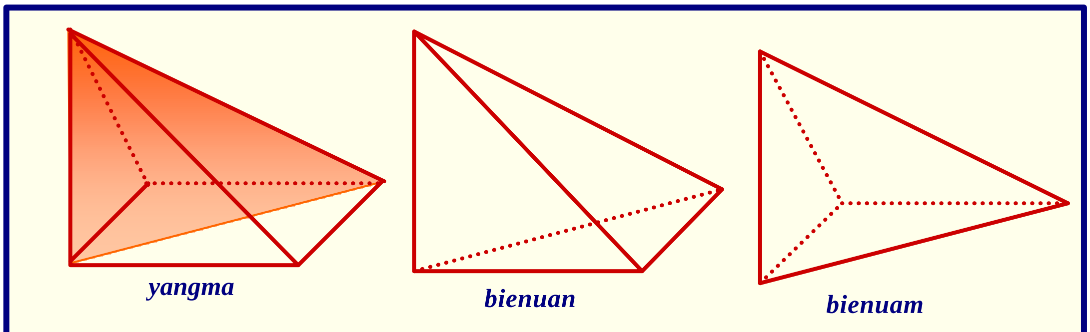


Figura 3.3

- 1 *yangma* = 2 *bienuam*

Convém observar que no artigo *On Pré-Babyloniam Mathematics I* de van der Waerder, estes sólidos elementares são chamados respectivamente de *Fan pao tao*, *Fang t'ing*, *Fang chui*, *Ch'ien tu*, e *Yang ma*.[28] Neste trabalho usarei os nomes dados pelos textos de história da matemática chinesa consultados.

O volume de um sólido geométrico pode ser calculado usando um dos seguintes métodos heurísticos:[29]

[28] van der Waerden, B. L. p. 20

[29] Nos casos mais simples, isto era suficiente mas, muito freqüentemente, outros métodos tinham que ser associados a estes métodos heurísticos.

- Reconstrução de um dado sólido pela combinação desses componentes básicos;
- Decomposição de um dado sólido em fragmentos não arbitrários pertencentes a uma das quatro categorias acima.
- O cálculo do volume de uma pirâmide yangma pode ser descrito como segue:
- Considerar uma pirâmide de base retangular com um lado perpendicular à base – um *yangma*;
- Usando os sólidos descritos acima podemos encontrar uma fórmula para calcular o volume da pirâmide *yangma* cuja base é o retângulo de lados **a** e **b** e de altura **h**;
- Se V_q ,V_y e V_b são os volumes do *qiandu*, da pirâmide *yangma* e da pirâmide *bienuam* temos que:

$$\left.\begin{array}{r} V_q = \frac{1}{2}abh \\ V_q = V_y + V_b \\ V_y = 2V_b \end{array}\right\} \rightarrow \quad \frac{abh}{2} = V_y + \frac{1}{2}V_y = \frac{3}{2}V_y \rightarrow V_y = \frac{1}{3}abh$$

- Logo, o volume de uma pirâmide de base retangular com uma das arestas perpendiculares à base é dado por:

$$V = \frac{abh}{3}$$

O volume da pirâmide *bienuam* cuja base é o triângulo retângulo de catetos a, b e altura h é dada por:

$$V = \frac{1}{2}\frac{abh}{3} = \frac{\frac{ab}{2}h}{3} = \frac{(\text{área da base})h}{3}$$

No cálculo do volume da pirâmide *yangma*, Liu Hui, não satisfeito com as manipulações algébricas também usa, como no caso da medida do círculo [ver Capítulo 3 deste trabalho], a idéia de passagem ao "limite" e o "método da exaustão". [30]

De acordo com Katz

> qualquer prova da fórmula para o volume de uma pirâmide deve usar considerações infinitesimais e assim, não é surpresa que exatamente como

[30] Seidenberg, A. p. 111; Horng, W. S. p. 408; Martzloff, J. C. p. 284

> no caso da medida do círculo, Liu Hui tenha usado de um processo de limite para derivar o volume da pirâmide.[31]

A pirâmide *yangma*, como já vimos, tem uma base retangular e um lado perpendicular à base[32].

O procedimento utilizado por Liu Hui pode ser descrito do seguinte modo:

Interceptando a pirâmide com um plano paralelo à base e três planos perpendiculares à base passando pelos pontos médios das arestas, decompomos a pirâmide dada em um paralelepípedo, duas pirâmides semelhantes à dada e dois *quiandu*. [Figura 3.4]

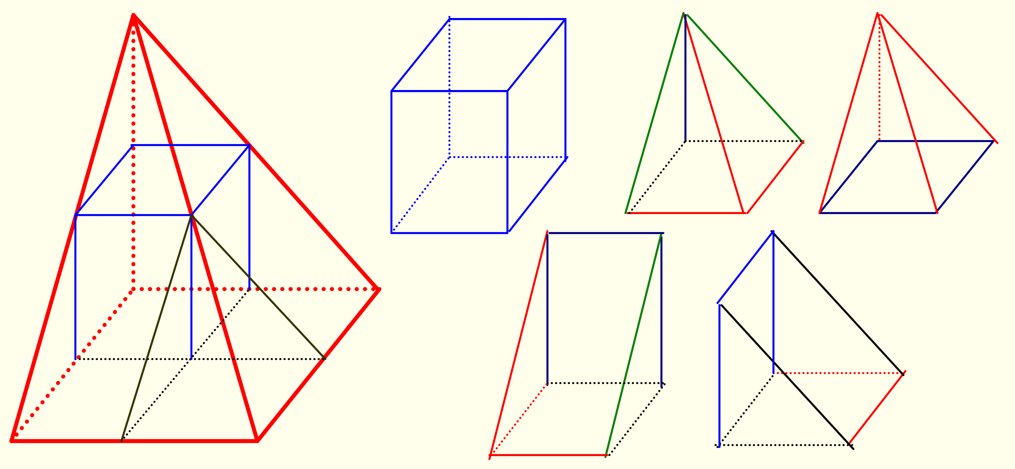


Figura 3.4

Se V é o volume da pirâmide dada temos:

$$V = V_p + 2V_q + 2V_1 = 2V_p + 2V_1$$

onde V_p é o volume do paralelepípedo de arestas $\frac{a}{2}; \frac{b}{2}$ e $\frac{h}{2}$ e V_q o volume do *qiandu* de base o retângulo de lados $\frac{a}{2}$ e $\frac{b}{2}$ e altura $\frac{h}{2}$.

Logo,

$$V_p = \frac{abh}{2^3}$$

e

[31] Katz, V. J. p. 41

[32]Tais figuras podem ser generalizadas considerando-as como interseções de um paralelepípedo de dimensões a, b, h com planos.

$$V = \frac{abh}{2^2} + 2V_1$$

Repetindo o processo temos:

$$V_1 = 2\frac{abh}{\left(2^2\right)^3} + 2V_2$$

Logo,

$$V = \frac{abh}{2^2} + 2^2\frac{abh}{\left(2^2\right)^3} + 2^2 V_2 = \frac{abh}{2^2} + \frac{abh}{\left(2^2\right)^2} + 2^2 V_2$$

Repetindo este processo um número, **n**, de vezes temos:

$$V = \frac{abh}{2^2} + \frac{abh}{\left(2^2\right)^2} + \cdots + \frac{abh}{\left(2^2\right)^n} + 2^n V_n$$

$$= \frac{abh}{2^2}\left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{\left(2^2\right)^2} + \cdots + \frac{1}{\left(2^2\right)^{n-1}}\right] + 2^n V_n$$

onde V_n é o volume da *yangma* de dimensões $\frac{a}{2^n}; \frac{b}{2^n}$ e $\frac{h}{2^n}$.

- Quando n tende ao infinito, V_n tende a zero e

$$V = \frac{abh}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{abh}{3}.$$

Veremos a seguir que, apesar do grande interesse dos **egípcios** pelas pirâmides, nos documentos conhecidos da época nenhuma referência explícita de uma fórmula para o cálculo do seu volume foi encontrada.[33]

As pirâmides são sempre consideradas uma prova visual de capacidade matemática dos egípcios. Sabendo que elas eram uma das suas estruturas favoritas – eles construíram numerosas pirâmides como lugar para sepultamento de seus faraós – é de se estranhar que não exista nenhum documento explícito com um procedimento para calcular o volume de uma pirâmide[34].

[33] Katz, V. J. p. 23
[34] Katz, V. J. p. 49; Bunt, L.N. H.; Jones, P. S. ; Bedient, J. D. p. 36

Os papiros conhecidos e antigos registros revelam pouco sobre o conhecimento dos egípcios em relação a este sólido geométrico. Tudo o que se sabe é que os escribas conheciam como calcular:

- O *seked* (inclinação dos lados) de uma pirâmide.
- O volume do tronco de pirâmide.
- O volume da pirâmide.
- O fato dos comentaristas assumirem que os egípcios conheciam a fórmula correta para o volume de uma pirâmide de base quadrada é baseado no fato deles conhecerem uma fórmula correta para o volume do tronco de pirâmide, como veremos mais adiante neste capítulo.

Desta maneira, alguns historiadores da matemática afirmam que para uma pirâmide de base quadrada **b** e altura **h,** os **egípcios** usavam a fórmula:

$$V = \frac{b^2h}{3}$$

Assumindo que esta conjectura seja verdadeira, podemos perguntar como eles chegaram a esta fórmula. Como os egípcios construíam suas pirâmides através do empilhamento de tijolos, talvez eles também tenham chegado à fórmula do volume da pirâmide pelo mesmo processo. De acordo com Katz, existem vários argumentos possíveis usando "tijolos" que levariam à fórmula correta para o cálculo deste volume.[35]

As únicas referências a cálculos de pirâmides além do problema MMP 14 relativo ao cálculo do tronco de pirâmide, são os problemas 56, 57, 58, 59 e 60 do papiro Rhind que são sobre estruturas arquitetônicas com lados inclinados [Figura 3.5]. Todos estes problemas são bastante simples e relativos à inclinação de pirâmides, exceto o último problema. A unidade de inclinação é o *seked* que é definido como o deslocamento horizontal em palmos para uma queda de 7 palmos (= um cúbito real).[36]

[35] Katz, V. J. p. 50
[36] Gillings, R. J. p. 183; Robins, G.; Shute, C. p. 47; Bunt, L.N. H.; Jones, P. S.; Bedient, J. D. p. 37

Figura 3.5

A seguinte tradução do texto do problema 56 que é acompanhado por um desenho [Figura 3.6]

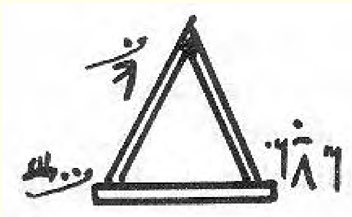


Figura 3.6

No problema 56 é dada a altura correspondente a 250 cúbitos e a base 360 cúbitos de uma pirâmide e pergunta-se qual é seu *seked*.

Solução dada pelo escriba:

- Achar a metade de 360 [medida da base]. Resultado 180;
- Dividir 180 por 250 [altura da pirâmide]. Resultado $\frac{18}{25}$;
- Agora 1 cúbito é 7 palmos;
- Então, multiplicar 7 por $\frac{18}{25}$. Resultado $\frac{126}{25} = 5\frac{1}{25}$;
- Este é seu *seked*.

Isto significa que a projeção ortogonal das faces triangulares da pirâmide é de $5\frac{1}{25}$ palmos para cada aumento de um cúbito na altura.

Assim, a inclinação das faces laterais de uma pirâmide de base quadrada de lado **b** e altura **h** é dada por: [Figura 3.7]

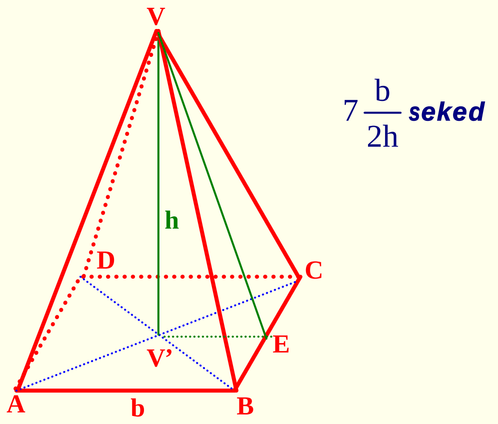


Figura 3.7

Mas $\frac{b}{2h}$ é a cotangente do ângulo VEV' que é o ângulo diedral que as faces laterais da pirâmide fazem com a base. A multiplicação por 7 é para obter o *seked* ou seja, a medida do deslocamento horizontal [em palmos] necessária para determinar inclinação da pirâmide quando a altura é de 1 cúbito real [Figura 3.8].

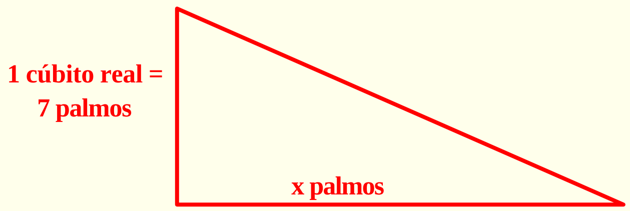


Figura 3.8

No problema 56 do papiro Rhind, a inclinação da pirâmide é dada por

$$\text{Cotangente}(\angle \text{VEV'}) = \frac{18}{25}$$

$$\frac{\text{x palmos}}{\text{1 cubito} = \text{7 palmos}} = \frac{18}{25} \rightarrow \frac{x}{7} = \frac{18}{25} \rightarrow x = 7\frac{18}{25}$$

Os construtores das pirâmides precisavam preservar suas direções com bastante cuidado de modo a obterem o mesmo *seked* para cada bloco de pedra subseqüente e esta deve ser uma das razões de o porquê da orientação das pirâmides ser exatamente norte-sul e leste-oeste.[37]

[37] Gillings, R. J. p. 186

Os outros problemas sobre pirâmides encontrados no papiro Rhind são semelhantes ao problema 56 onde são dados dois dos três elementos base, altura e *seked* e o problema pede para calcular o terceiro.

A discussão dos problemas 56 a 60 do papiro Rhind e do conceito de seked pode levar a uma reflexão sobre conceitos trigonométricos como os de ângulo, tangente e cotangente. Permite também, trabalhar o conceito de ângulo diedral e levantar questões sobre como usando o seked é possível construir uma pirâmide por empilhamento de tijolos [como eram feitas na antigüidade] de modo que ao final da construção as superfícies laterais do monumento estejam contidas em planos e a inclinação das faces laterais seja aquela desejada.

Jahnke[38] *em seu artigo The use of original sources in mathematics classroom, sugere algumas atividades que podem ser desenvolvidas em um curso de formação de professores, inclusive a construção de instrumentos para medir o seked e sua aplicação no estudo de algumas funções trigonométricas.*

Com relação a como os egípcios podem ter chegado ao volume da pirâmide de base quadrada, Gilling sugere algumas possibilidades:

- É simples construir uma pirâmide e uma caixa retangular vazada de mesma base e altura, para determinar que a pirâmide tem um terço da capacidade da caixa retangular simplesmente enchendo os recipientes com areia ou água.
- Os egípcios sabiam que o volume de um bloco retangular é igual ao produto de suas dimensões lineares; então, o volume de uma pirâmide seria um terço da área da base vezes a altura. Da mesma maneira, os dois sólidos poderiam ser construídos de argila do Rio Nilo e pesados no modo egípcio usual.
- Outra possibilidade é o método da decomposição, em que uma pirâmide é cortada e suas partes re-arrumadas de modo a formar um bloco retangular cujo volume pudesse ser facilmente calculado.

Com base nesta última possibilidade, podemos decompor uma pirâmide de base quadrada, construída de argila ou madeira, cuja altura seja exatamente a metade da base quadrada em quatro pirâmides de mesma altura e base um quarto da pirâmide dada [Figura 3.9]

[38] Jahnke, H. N.et alli p. 298-302

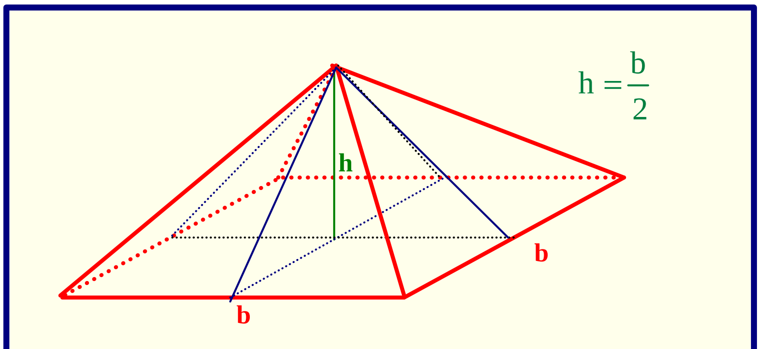


Figura 3.9

Três destas pirâmides juntas formam um cubo cujos lados são iguais à metade da base da pirâmide. [Figura 3.10]

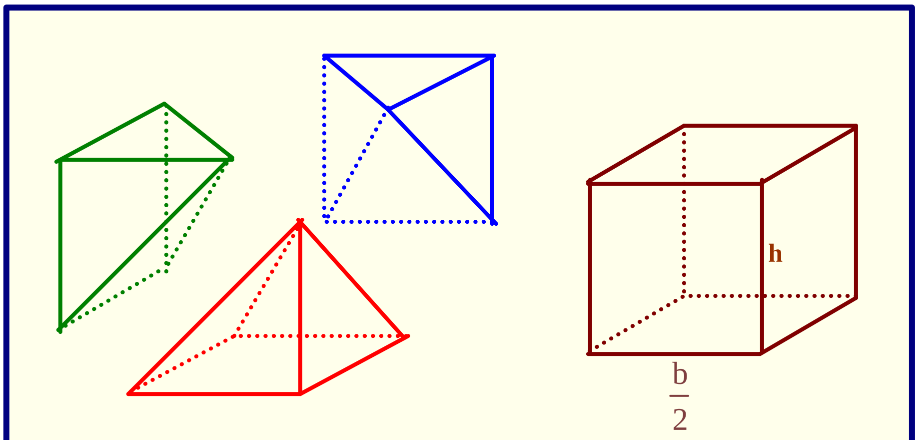


Figura 3.10

Assim,

$$V_{cubo} = \frac{3}{4} V_{pirâmide} \rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} V_{pirâmide} \rightarrow V_{pirâmide} = \frac{4}{3}\frac{b^3}{8} = \frac{1}{3} b^2 \frac{b}{2} = \frac{b^2 h}{3}$$

onde **b** é a base da pirâmide e **h =** $\frac{b}{2}$ sua altura.

Outro método é construir 6 pirâmides congruentes de base quadrada de lado **b** e altura $h = \frac{b}{2}$ e juntá-las para formar o cubo conforme figura 3.11.

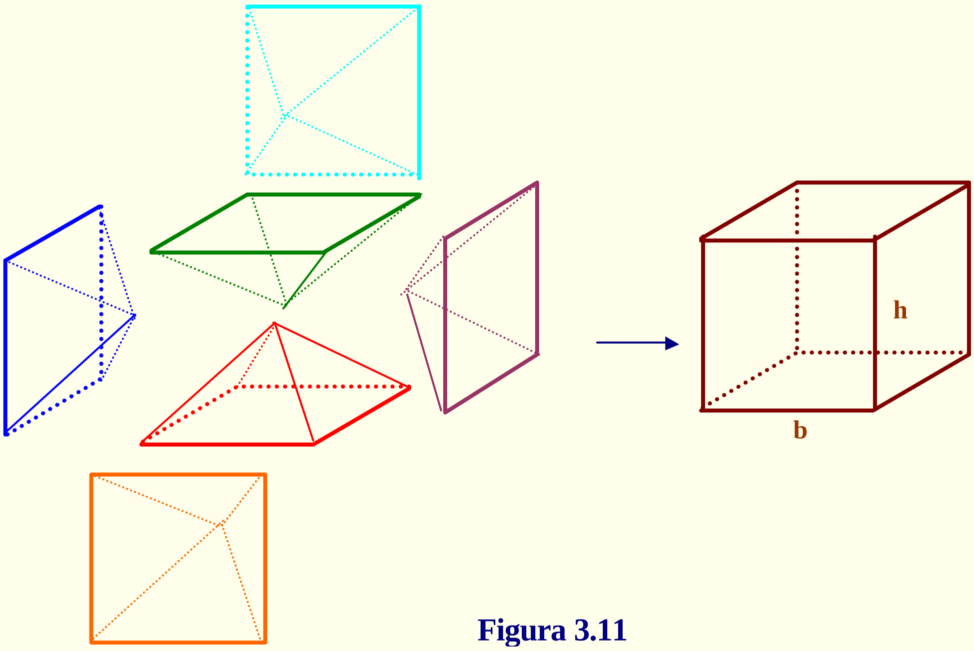


Figura 3.11

Assim,

$$V_{cubo} = 6V_{pirâmide} \rightarrow b^2h_{cubo} = 6V_{pirâmide} \rightarrow V_{pirâmide} = \frac{1}{6}b^2h_{cubo} = \frac{1}{3}b^2\frac{h_{cubo}}{2} = \frac{b^2h_{pirâmide}}{3}$$

Obtemos assim, uma fórmula para o cálculo de uma pirâmide de base quadrada cuja altura é igual à metade da base.

A discussão por professores em formação dos problemas encontrados no papiro Rhind sobre pirâmides e das considerações feitas por Jahnke em seu artigo abriria mais um espaço para o debate, em aulas de geometria, sobre a inserção do componente histórico no ensino desta disciplina, sobre a construção de materiais concretos significativos para o ensino aprendizagem da geometria, sobre os diversos tipos de "demonstrações" que podem ser usadas para inferir fórmulas geométricas, em que níveis da escolaridade podem ser trabalhadas e, também, mostrar aos futuros professores que existem diversos modos de trabalhar com os alunos os volumes de sólidos geométricos além de simplesmente apresentar a eles uma fórmula para ser aplicada.

Segundo Katz[39], ainda não foi encontrado nenhum tablete babilônico mostrando o cálculo do volume de uma pirâmide mas, parece razoável assumir que os babilônios estavam familiarizados com a fórmula correta

---

[39] Katz, V. J. p. 24

$$V = \frac{hab}{3}$$

Para justificar esta afirmação, Katz observa que os melhores exemplos **babilônicos** de volumes de sólidos envolvendo pirâmides são do texto BM 96454 que contém vários problemas envolvendo pilhas de grãos na forma de uma pirâmide de base retangular com o ápice alongado[40], conforme figura 3.12.

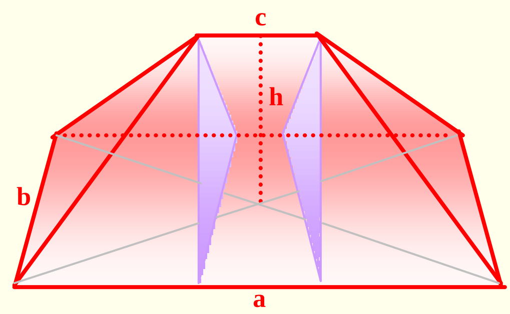


Figura 3.12

O método para encontrar a solução corresponde à fórmula

$$V = \frac{hb}{3}\left(a + \frac{c}{2}\right)$$

Apesar dos babilônios não apresentarem indícios de como chegaram a esta fórmula, ela pode ser deduzida usando o método comum na Antigüidade de decompor o sólido em outros de volumes conhecidos.

De fato, podemos decompor o sólido acima em duas pirâmides de bases retangulares de lados **a** e **b** e altura **h** e um prisma de bases triangulares conforme figura 3.13.

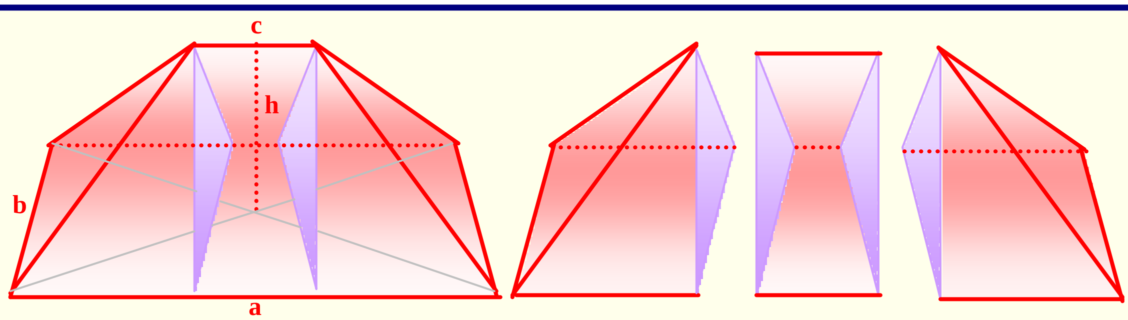


Figura 3.13

---

[40] Katz. V. J. p. 23

Cada uma das pirâmide de base retangular tem lados da base iguais a **b** e $\frac{a-c}{2}$ e altura **h**. O prisma tem base retangular de lados **a** e **c** e altura **h.**

Assim, o volume do sólido é:

$$\begin{aligned} V &= \frac{bch}{2}+\frac{2h}{3}\left(\frac{(a-c)\,b}{2}\right) \\ &= \frac{bch}{2}+\frac{abh}{3}-\frac{bch}{3} \\ &= \frac{bch}{6}+\frac{abh}{3} \\ &= \frac{bh}{3}\left(a+\frac{c}{2}\right) \end{aligned}$$

4.3.1. Considerações finais sobre a pirâmide

De acordo com Arquimedes, a fórmula do volume da pirâmide foi "provada" por Eudoxus [usando método da exaustão] mas foi primeiro determinada por Demócrito sem uma prova válida.[41]

Hilbert colocou a questão de, se com base em seus axiomas para geometria, ser possível achar o volume de um tetraedro por um argumento finito. Ou, se dois tetraedros de mesma altura e bases de mesma área podem ser decompostos no mesmo número (finito) de poliedros que são dois a dois congruentes. M. Dehn [1902] mostrou que a resposta é negativa[42]

Com base nisto, Neugebauer afirmou que os antigos de cerca de 1800 a.C. já empregavam processos infinitos. Seidenberg afirma que:

Estritamente falando, este argumento está errado *ou incompleto, desde que ele pôde provar por um argumento simples, acessível aos Antigos Babilônios, e baseado em hipóteses plausíveis e não usando processos infinitos,* como *obter a fórmula* $V=\frac{1}{3}\text{base}\times\text{altura}$.[43]

Por outro lado, no capítulo V do *Juizhang suanshu* o volume do tronco de pirâmide é calculado como

$$V=\frac{u^2+uv+v^2}{36}h$$

[41] Katz, V. J. p. 49
[42] Seidenberg, A. p. 114
[43] Seidenberg, A. p. 114

Que está correta, exceto pelo valor de π usado no cálculo da área do círculo.

4.4. Tronco de Pirâmide

Existem quatro textos falando sobre o volume de tronco de pirâmide: dois babilônios, um chinês e um egípcio.

Com relação aos textos babilônios, o volume do tronco de pirâmide de bases quadradas $\mathbf{a^2}$ e $\mathbf{b^2}$ e altura h no texto BM 85210, é calculado usando a fórmula:

$$V = \frac{1}{2}[a^2 + b^2]h$$

que corresponde à fórmula encontrada no problema 9 do texto BM 85194 sobre o cálculo do tronco de cone.

No texto BM 85194 que calcula troncos de cones, o volume do tronco de pirâmide de altura 18 e bases quadradas de lados **a** = 10 e **b** = 7 é realizado, como segue:

- Cálculo[44] de

$$\begin{aligned}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &= \left(\frac{10+7}{2}\right)^2 = \frac{289}{4}\\ &= 72 + \frac{1}{4} = 60 + 12 + \frac{15}{60}\\ &= 1\times 60 + 12\times 60^0 + 15\times 60^{-1}\\ &= 1{,}12;15\end{aligned}$$

- Isto sugere que o cálculo era baseado na fórmula

$$V = \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + ...\right]h$$

onde, ... representa um termo duvidoso – o texto está danificado.

- Cálculo de a – b = 3
- Por uma operação que não está totalmente clara, o texto chega ao número 45 que pode ser interpretado como sendo 0;45 que corresponde, no sistema decimal a $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$.
- Neugebauer explica o número 0;45 vindo da fórmula

[44] O sistema de numeração dos babilônios era sexagesimal.

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

- Assim, o termo duvidoso do texto deve ser

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

- E, de acordo com Neugebauer, o cálculo apresentado no texto BM 85194 é baseado na fórmula correta[45]

$$V=\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right\}h$$

Por outro lado, o termo duvidoso poderia ser interpretado como

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

e, então, a fórmula seria

$$V=\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+....\right]h=\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]h$$

$$=\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{2}+\frac{a^2-2ab+b^2}{2}\right)h$$

$$=\frac{a^2+b^2}{2}h$$

que é a mesma encontrada no texto BM 85210.

Já Thureau-Dangin considera 0;45 como resultado do cálculo de $\frac{a-b}{4}$ e, nesse caso, o cálculo do volume é dado pela fórmula

$$V=\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)\right\}h$$

Mas van der Waerden tem ainda outra explicação. Primeiro, ele encontra dificuldades na explicação de Neugebauer indicando os textos “relacionados” BM85196 e BM85210 nos quais a fórmula

---

[45] van der Waerden, B. L. p. 21; Seidenberg, A. p. 108

$$V = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)h$$

é usada. Tomando por base o fato de que "o espaço no texto que precede o número 45 e que contém poucos símbolos ilegíveis é muito pequeno para o cálculo de $\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$" e "ambas as dificuldades desaparecem se supormos que 0;45 é um erro de cálculo e devemos substituir por $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 2;15$.

Isto significa que o trabalho é baseado na fórmula

$$V = \left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right\}h$$

que está, de fato, errada mas coincide com

$$V = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)h$$

Assim, para van der Waerden, o termo obscuro é $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

Seindenberg concorda com Neugebauer e sustenta o fato de que os babilônios tinham a fórmula correta para o cálculo do volume do tronco de pirâmide apesar das evidências, segundo ele, não estarem claras.[46]

Uma análise pelos professores-alunos das fórmulas utilizadas para cálculos de áreas e volumes encontradas nos trabalhos matemáticos dessas civilizações poderia fazer com que percebessem a necessidade de algum tipo de argumentação como meio de garantir a validade dos resultados encontrados. A análise cuidadosa de afirmações e o exercício do convencimento são necessários não apenas no trabalho matemático, mas em toda atividade na qual o individuo esteja envolvido. É, portanto, importante que a formação do aluno e do professor-aluno propicie momento de análise e reflexão que venham desenvolver a capacidade de argumentação e convencimento dentro de argumentos éticos e lógicos.

O método utilizado por Liu Hui, em seu comentário sobre o *Jiuzhang* suanshu, para a fórmula **chinesa** do volume de um tronco de pirâmide – o *fang ting* [barraca de base quadrada]

---

[46] Seidenberg, A. p. 108

$$V_{tp} = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$$

é baseado na decomposição deste sólido em nove sólidos elementares: 1 *lifang*, 4 *qiandu* e 4 *yangma*[47] [Figura 4.1] e podemos descrevê-lo do seguinte modo:

- Dividir o tronco de pirâmide por planos verticais como é indicado na figura 4.1.

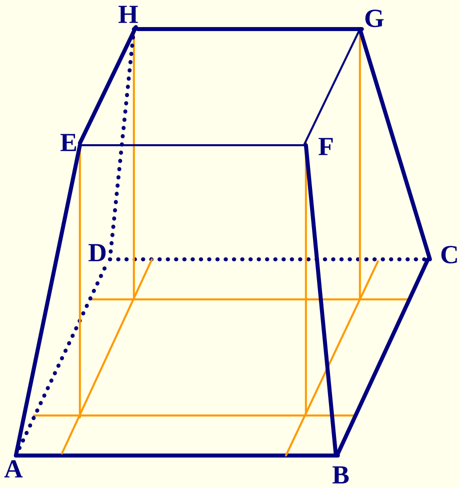


Figura 4.1

- As partes são: um cubo central, 4 prismas e 4 pirâmides. [Figura 4.2]

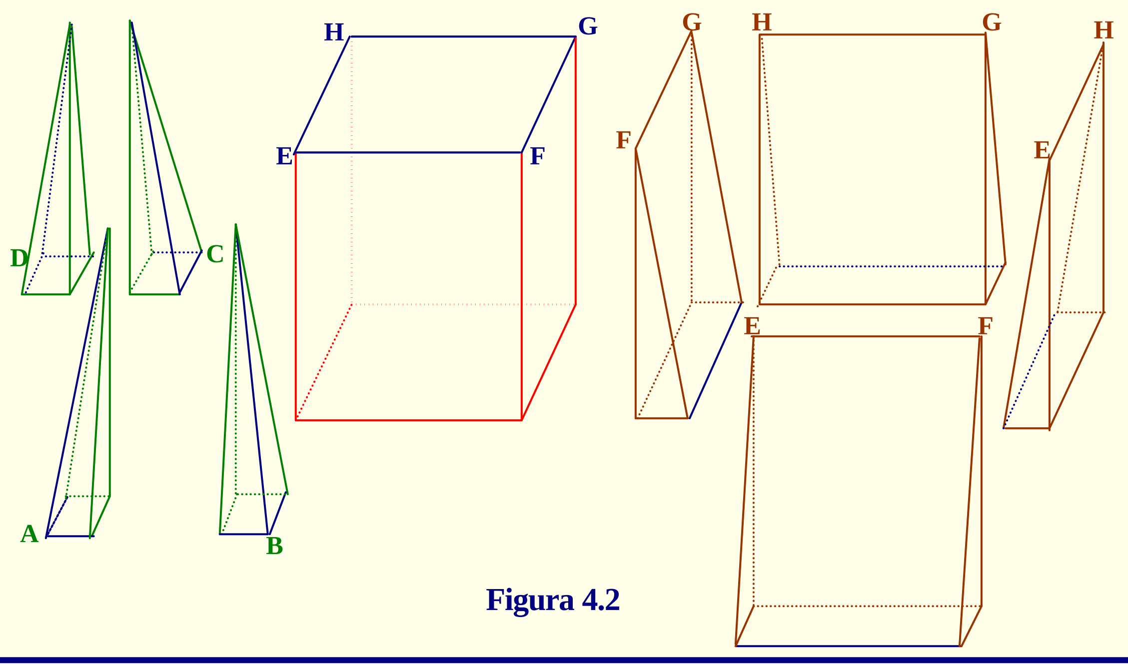


Figura 4.2

Liu Hui assume aqui que a base menor está simetricamente colocada em relação a base maior.[48]

[47] Martzloff, J-C. p. 283; Yan, L.; Shíràn, D. p. 72

Ele também trata apenas do caso h = 1, a = 3 e b = 1.

- Retirar do tronco de pirâmide as 4 pirâmides.
- Inverter o prisma norte e colocar sobre o oeste, inverter o sul e colocar sobre o leste. Forma-se um bloco (união do bloco de base **b** e altura **h** com os 4 prismas) de volume abh[49]. [Figura 4.3]

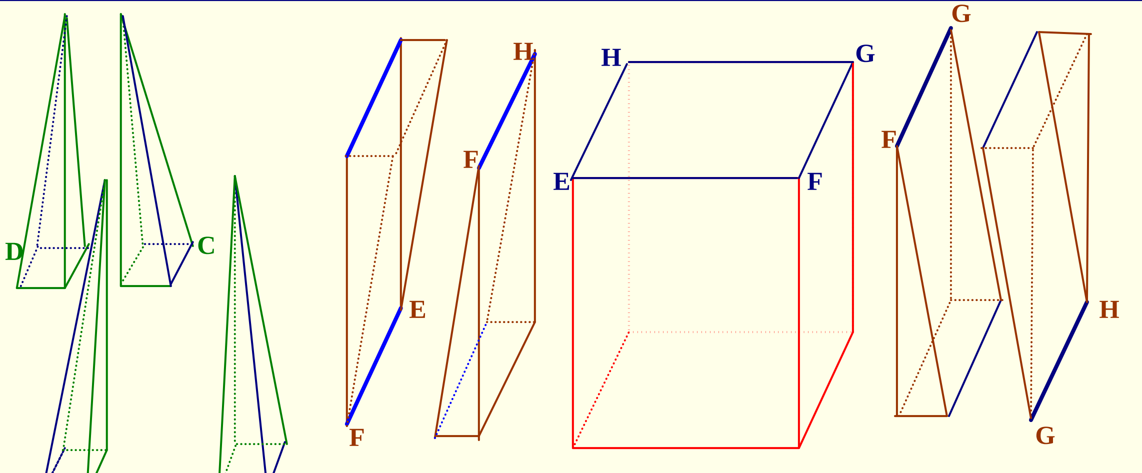


Figura 4.3

- Sabendo que o volume da pirâmide de base quadrada de lado a e altura **h** é $\frac{1}{3}a^2h$.
- Temos:

$$V = abh + 4\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 h$$

$$= abh + \frac{1}{3}(a-b)^2 h$$

$$= abh + \frac{1}{3}(a^2 - 2ab + b^2)h = abh + \frac{1}{3}(a^2 - 2ab + b^2)h$$

$$= \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h \,.$$

É possível que esta prova tenha sido inventada por Liu Hui, mas existe a possibilidade de que já fosse conhecida, porque os sólidos elementares usados já eram conhecidos.[50]

---

[48] A redução desse caso ao caso geral é simples.

[49] Lui Hui inverte a oeste e coloca sobre a norte e inverte a leste colocando-a sobre a sul. Isso é equivalente ao que foi feito.

[50] van der Waerden, B. L. p.41

Agora, se tomarmos as cunhas leste e oeste, invertermos uma das duas e unirmos, tomarmos as cunhas norte e sul, invertermos uma das duas e unirmos, [Figura 4.4], ao invés de um paralelepípedo, obteremos um prisma reto cuja base será um *gnomon* e a altura será h. [Figura 4.5]

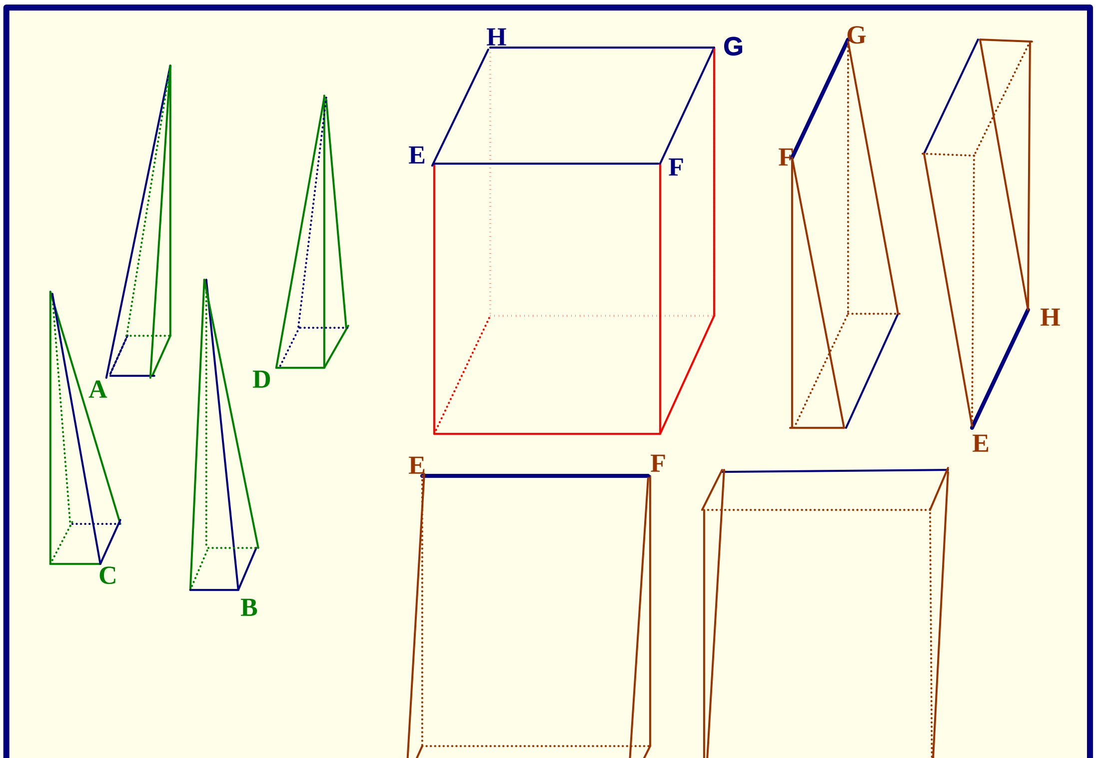


Figura 4.4

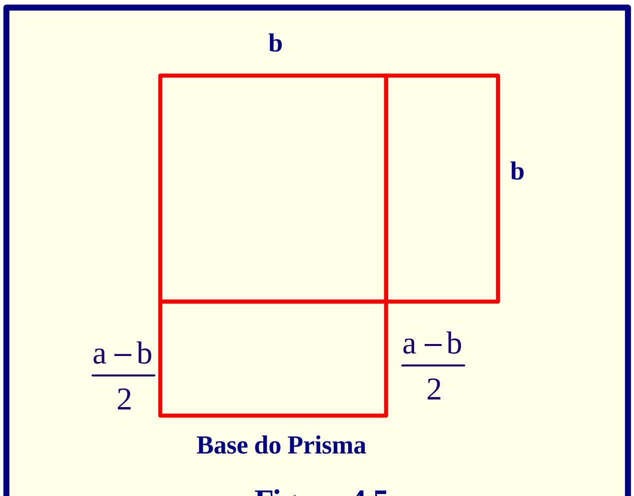


Figura 4.5

- E neste caso, sabendo que o volume da pirâmide de base quadrada de lado a e altura **h** é $\frac{1}{3}a^2h$ e que o volume do prisma é $\left[\left(b+\frac{a-b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]h$ temos para volume do tronco de pirâmide:

$$V = \frac{4}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 h + \left[\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right] h$$

$$= \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right] h$$

Que é a fórmula babilônica para o volume do tronco de pirâmide.

Os chineses também sabiam como calcular o volume de um tronco de pirâmide cujas bases eram retângulos diferentes. Supondo que a base menor está colocada simetricamente em relação à base maior podemos usar o segundo argumento dado acima mas o primeiro não se aplica.[51]

Para calcular volumes de vários outros sólidos Liu Hui usa métodos semelhantes aos que acabamos de descrever. Por exemplo:

- O volume do *chú méng* [sotão de forragem] é calculado usando dois prismas e quatro *yangams*. [Figura 4.6]

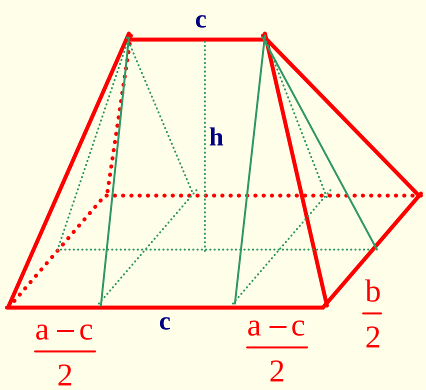


Figura 4.6

Assim, se **a** e **b** são os lados da base, **c** a medida do lado superior e **h** a altura temos que:

$$V = \frac{4h}{3}\left[\frac{a-c}{2}\,\frac{b}{2}\right] + c\,\frac{b}{2}\,h$$

$$= \frac{h}{3}[ab - cb] + \frac{cb}{2}h$$

$$= \frac{bh}{6}[2a - 2c + 3c] = \frac{bh}{6}[2a + c]$$

Que é a mesma fórmula babilônica para este sólido.

[51] Seidenberg é de opinião que os chineses também conheciam o segundo argumento. [Seidenberg, A. p. 113]

- O *xiàn chú* [bueiro] pode ser decomposto em dois ou quatro tetraedros com um prisma entre eles [Figura 4.7].

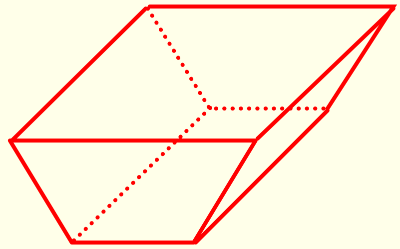


Figura 4.7

- O volume do *fang zhui* [sovela[52] quadrada] é calculado como o volume de 4 pirâmides. [Figura 4.8].

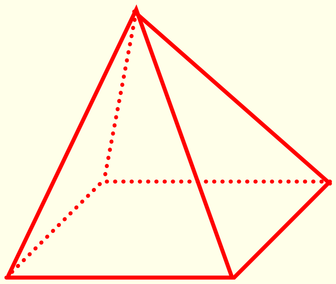


Figura 4.8

➢ O *chú tóng* [sótão de menino] como o volume de dois cubos, oito prismas e quatro pirâmides [Figura 4.9].

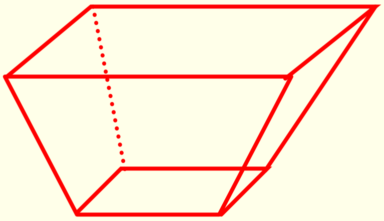


Figura 4.9

Embora nenhum documento **egípcio** apresente um procedimento explícito para o volume de uma pirâmide, existe um único problema no Papiro Moscou que fornece orientações explícitas para determinar o volume de um tronco de pirâmide com bases quadradas 2 e 4 e altura 6. A figura 4.10 mostra este problema.[53]

---

[52] Sovela: instrumento com que os sapateiros furam o couro para cosê-lo. Koogan, A.; Houaiss, A. p. 793

[53] Bunt, L. N. H.; Jones, P. S.; Bedient, J. D. p. 37; Gillings, R. J. p. 189

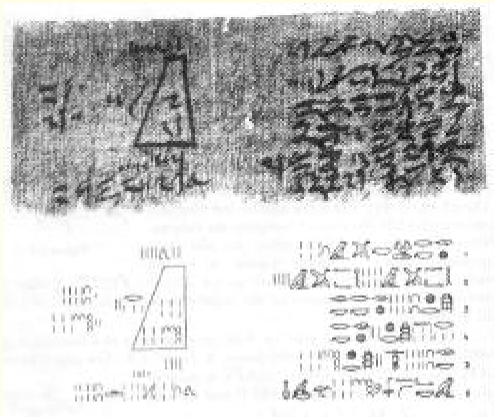


Figura 4.10

Usando a notação atual podemos descrever o procedimento do seguinte modo:

- Calcular o quadrado de 4. Resultado 16.
- Achar o dobro de 4. Resultado 8.
- Calcular o quadrado de 2. Resultado 4.
- Somar 16 com 8 e com 4.
- Resultado 28.
- Calcular a terça parte de 6. Resultado 2.
- Calcular o dobro de 28.
- Resultado 56. Você achou o volume corretamente.

Se considerarmos um tronco de pirâmide de bases quadradas a e b e altura h e seguirmos o procedimento egípcio, chegaremos ao seguinte resultado:

- Calcular o quadrado de a. Resultado a^2.
- Achar b vezes a. Resultado ab.
- Calcular o quadrado de b. Resultado b^2.
- Somar a^2 com ab e com b^2.
- Resultado $a^2 + ab + b^2$.
- Calcular a terça parte de h. Resultado $\frac{h}{3}$.
- Calcular $\frac{h}{3}$ vezes $(a^2 + ab + b^2)$.

- Resultado $\frac{h}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$. Você achou o volume corretamente.

Podemos então dizer que o método egípcio para calcular o volume de um tronco de pirâmide é equivalente ao chinês e corresponde a aplicação da fórmula.[54]

$$V=\left(a^2+ab+b^2\right)\frac{h}{3} \quad (*)$$

Tal fórmula, segundo Seidenberg[55], só poderia ser obtida através de uma análise geométrica ou pela álgebra.

Observe que se fizermos a = 0 teremos

$$V=\frac{b^2h}{3}$$

a fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide de base quadrada **b** e altura **h**.

É bem conhecida a controvérsia de como os egípcios poderiam ter encontrado a fórmula (*) para o volume de um tronco de pirâmide de base quadrada. Alguns argumentam que é um grande mistério, desde o famoso resultado de Max Dehn de 1900 mostrando que eles não poderiam ter chegado a esta fórmula sem utilizarem-se de métodos desenvolvidos muito tempo depois. Alguns sugerem que a regra pode ter sido encontrada de vários modos, por exemplo, a partir da experiência na construção de pirâmides e/ou da consideração do caso especial de seis pirâmides congruentes com bases as faces de um cubo e ápice comum no centro [Figura 3.11], generalizando a seguir a regra.[56]

Várias tentativas para averiguar como os egípcios teriam encontrado a fórmula para calcular o volume do tronco de pirâmide foram feitas. A apresentada a seguir pode ser encontrada em Gillings, e é um processo de determinar o volume de troncos de pirâmides especiais na tentativa de imaginar como poderíamos inferir tal fórmula,

---

[54] Seidenberg, A. p. 108
[55] Seidenberg, A. p. 108
[56] May, K. p. 186-187

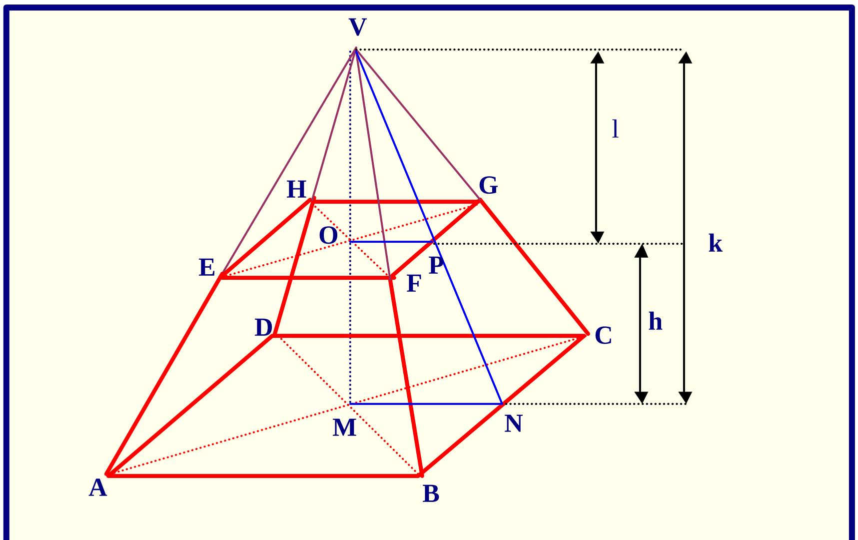


Figura 4.11

- Considerar uma pirâmide de bases quadradas AB = a e EF = b com altura passando pelos centros das bases. [Figura 4.11]
- O volume do tronco de pirâmide pode ser calculado como o volume de toda a pirâmide, menos a pequena pirâmide cortada do topo.
- Se k é a altura da pirâmide toda e h a altura do tronco de pirâmide, então

$$k = h + \ell$$

onde ℓ é a altura da pirâmide menor.

- Além disso, por semelhança dos triângulos temos que

$$\frac{\ell}{h} = \frac{b}{a-b}$$

e

$$V_{\text{tronco de pirâmide}} = \frac{1}{3}a^2k - \frac{1}{3}b^2\ell = \frac{1}{3}\left[a^2(h+\ell) - b^2\ell\right] = \frac{1}{3}\left[a^2h + a^2\ell - b^2\ell\right]$$

- Se a = 2b [caso do problema 14 do papiro Moscou], temos h = λ

$$V_{\text{tronco de pirâmide}} = \frac{h}{3}\left[a^2 + \left(a^2 - b^2\right)\right]$$

- Mas,

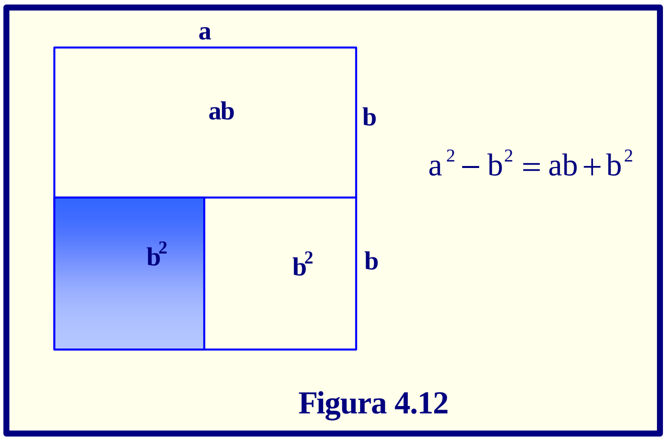


Figura 4.12

Logo,

$$V_{\text{tronco de pirâmide}} = \frac{h}{3}\left[a^2 + ab + b^2\right]$$

que é a fórmula egípcia.

- Analogamente se a = 3b, h = 2λ e

$$V_{\text{tronco de pirâmide}} = \frac{h}{3}\left[a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)\right]$$

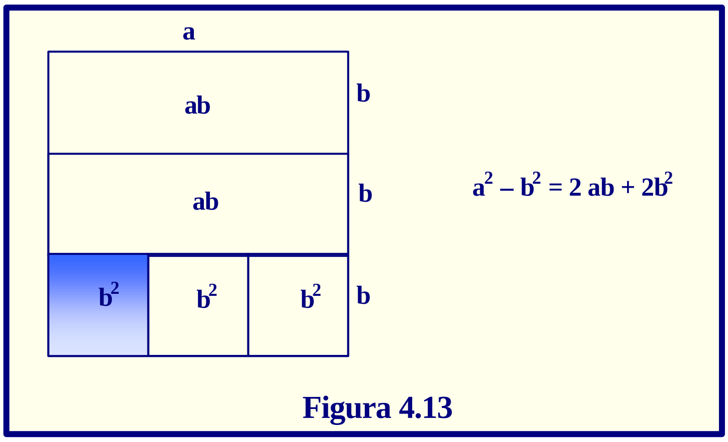


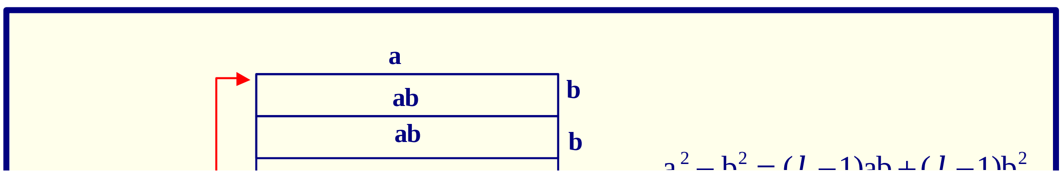
Figura 4.13

- E mais uma vez encontramos que

$$V_{\text{tronco de pirâmide}} = \frac{h}{3}\left[a^2 + ab + b^2\right]$$

Podemos continuar repetindo este processo para **a =** l **b** onde l **> 1** é um número inteiro obtendo que **h = (**l **-1)** l

$$V_{\text{tronco de pirâmide}} = \frac{h}{3}\left[a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{l - 1}\right)\right]$$



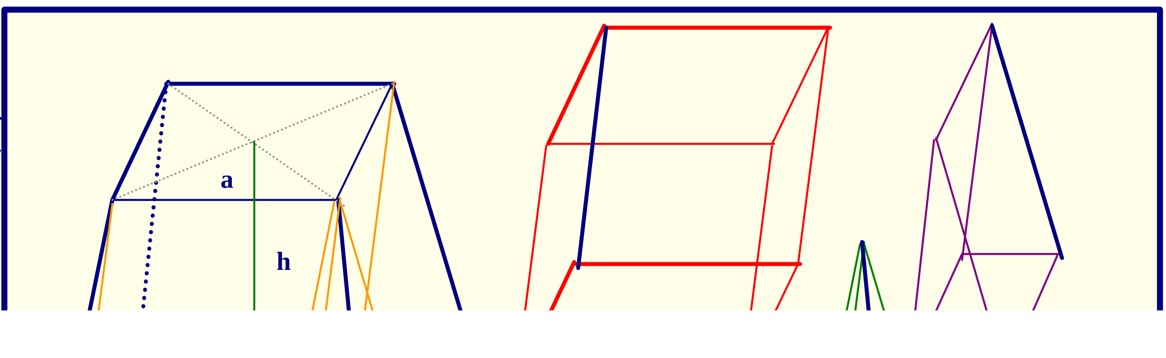
- Assim, para troncos de pirâmides de base quadrada **a** e **b** com altura **h** e **a =** l **b** com l > **1** inteiro, temos que:

$$V_{\text{tronco de pirâmide}} = \frac{h}{3}\left[a^2 + ab + b^2\right]$$

que é a fórmula egípcia.

Um outro modo de chegar à fórmula egípcia é através da decomposição do tronco de pirâmide em um paralelogramo, dois prismas e uma pirâmide[57]

- Considere um tronco de pirâmide de bases quadradas de lados a e b (e altura h.
- Podemos decompor este tronco de pirâmide em [Figura 4.15]:
  - Uma pirâmide de base quadrada **b-a** e altura **h**.
  - 2 prismas de base retangular de lados **a** e **b-a** e altura **h**.
  - 1 paralelepípedo oblíquo de base quadrada a e altura **h**



57

- O volume do tronco de pirâmide pode ser calculado então como:

$$V_{\text{tronco de pirâmide}} = V_{\text{pirâmide}} + V_{\text{paralelepípedo}} + 2V_{\text{prisma}}$$

$$= \frac{1}{3}(b-a)^2 h + a^2 h + (b-a)ah$$

$$= \frac{h}{3}\left[b^2 - 2ab + a^2 + 3a^2 + 3ab - 3a^2\right]$$

$$= \frac{h}{3}[b^2 + ab + a^2]$$

Pela análise nos textos gerais de história da matemática consultados é possível perceber uma tendência a englobar todo o fazer matemático anterior ao grego com o rótulo de pré-história da matemática. Esta atitude pode nos levar a pensar que só existe matemática legítima quando se põe em prática o método dedutivo. A análise que acabamos de ver de como os egípcios podem ter chegado a uma fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide, permitiria uma reflexão quanto à esta atitude , à importância de trazer para sala de aula os vários métodos utilizados por diversas culturas na tentativa de encontrar soluções para os problemas oriundos das necessidades destas sociedades e sobre a influência do contexto sócio-cultural na determinação da forma como o conhecimento é adquirido e transmitido para os membros interessados pela questão.

4.4.1. 6. Considerações Finais sobre Tronco de Pirâmides

A mais antiga prova do volume do tronco de pirâmide foi dada pelo matemático grego Heron de Alexandria , *Métrica* ii, 8.[58]

A variedade de sólidos geométricos, conhecidos por nossos alunos, que possuem a mesma forma dos sólidos discutidos pelos povos aqui estudados, permite a elaboração, por parte dos professores em formação, de problemas significativos que podem ser aplicados no ensino fundamental e médio, a construção de materiais concretos para o cálculo do volume desses objetos e o trabalho com o cálculo de volume que não se restringe apenas à aplicação de fórmulas conhecidas e memorizadas.

4.5. Índice de Figuras

[58] Robins, G.; Shute C. p. 49

4.6. Bibliografia

AMMA, S. T. A. **Geometry in Ancient and Medieval India** 1a. ed. Índia: Motilal Banarsidass, 1979. 280 p.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução Elza Gomide. 2a. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996. 496 p.

BUNT, L. N. H.; JONES, P. S.; BEDIENT, J. D. **The Historical Roots of Elementary Mathematics** 1a. Dover ed. New York: Dover Publications Inc., 1988. 299 p.

CHIARA, V. Armas: Bases para uma classificação In: RIBEIRO, D. **SUMA Etnológica Brasileira 2. Tecnologia Indígena..** 2a. ed. Petrópolis: Vozes, 1987. 4. p. 117-137.

COSTA, M. H. F.; MALHAMO, H. B. Habitação Indígena Brasileira In: RIBEIRO, D. **SUMMA Etnológica Brasileira 2. Tecnologia Indígena..** 2a. ed. Petrópolis: Vozes, 1987. 1. p. 27-94.

GERDES, P. **Sobre o Despertar do Pensamento Geométrico.** 1986. Tese de Doutorado - Instituto Superior Pedagógico "Karl Friedrich Wilhelm Wander" de Dresden (RDA).

GILLINGS, R J. **Mathematics in the time of the Pharaohs** New York: Dover Publications Inc., 1972. 288 p.

HORNG, W. S. The Pythagorean theorem in different cultures In: FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. **History in Mathematics Education. The ICMI Study.** 1a. ed. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. 8. p. 258-262.

HORNG, W-S. Euclid versus Liu Hui: A pedagogical refletion In: HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1996, Braga. **História e Educação Matemática. Proceedings. Actes. Actas. v. II.** Braga, 1996. p. 404-411.

JAHNKE, H. N. ET ALLI. The Use of Original Sources in the Mathematics Classroom In: FAUVEL, J.; van MAANEN, J. **History in Mathematics Education. The ICMI Study.** Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. 9. p. 291-328.

JOSEPH, G. G. **The Crest of The Peacock** 2a. ed. USA: Princeton University Press, 2000. 455 p.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics. An Introduction** 2a. ed. USA: Addison-Wesley Educational Publishers Inc., 1998. 856 p.

KATZ, V. J. Egyptian Mathematics In: HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1996, Braga. **História e Educação Matemática. Proceedings. Actes. Actas. v. I.** Braga, 1996. p. 45-53.

KLINE, M. **Mathematics for the Nonmathematician** New York: Dover Publications Inc., 1967. 641 p.

KOOGAN, A.; HOUAISS, A. **Enciclopédia e Dicionário Ilustrado** Rio de Janeiro: Edições Delta, 1996. 1635 p.

LANGDON, J. A Cultura Siona e a Experiência Alucinógena In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 1a. ed. São Paulo: Studio Nobel/EDUSP, 1992. p. 67-87.

MARTZLOFF, J. C. **A History of Chinese Mathematics.** Tradução S. Wilson. 1a. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1997. 484 p.

MAY, K. Historiographic Vices I. Logical Attribution. **Historia Mathematica**, v. 2, p. 185-187, 1975.

MIKAMI, Y. **The Development of Mathematics in China and Japan** 2a. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1910.

Pirâmides Chinesas Disponível em: <**www.ufogenesis.com.br/arqueologia/casos/piramides_china.htm**> Acesso em: 15 jun. 2003.

RIBEIRO, B. G. **Dicionário do Artesanato Indígena** São Paulo: EDUSP, 1988. 343 p.

ROBINS, G.; SHUTE C. **The Rhind Mathematical Papyrus. An Ancient Egyptian Text** 1a. ed. New York: Dover Publications Inc., 1987. 60 p.

SARASVATI, S. S. P. **Geometry in Ancient India** Índia: Govindram Hasanand, 1987. 230 p.

SEIDENBERG, A. On the Volume of a Sphere **Archive for History of Exact Sciences**, Berlin, v. 39, n. 2, p. 97-119, Dezembro 1988.

SEIDENBERG, A. The Ritual Origin of Geometry **Archieve for History of Exact Sciences.**, p. 488-527, 1963.

SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R. (Ed.). **A History of Technology. Vol. 1. From Early Times to Fall of Ancient Empires.** Inglaterra: Oxford University Press, 1958. 827 p. v. 1.

SMITH, D. E. **History of Mathematics** New York: Dover Publications Inc., 1958. 596 p. v. I.

VAN DER WAERDEN, B. L. On Pre-Babylonian Mathematics II **Archive for History of Exact Sciences**, Berlin, v. 23, n. 1, p. 27-46, Novembro 1980.

YAN, L.; SHÍRÀN, D. **Chinese Mathematics. A Concise History.** Tradução J. N. Crossley; A. W.-C. Lun. New York: Oxford Science Publications, 1987. 290 p.

‘’5. Esferas, Cones e Cilindros

5.1. Introdução

Norteiam este capítulo questões que emergiram a partir das informações encontradas sobre o uso de esferas, cones e cilindros entre os povos aqui estudados, como estas formas foram incorporadas à cultura de cada um deles, o conhecimento geométrico desenvolvido por cada um destes grupos sociais.

Com relação a como e quando se deu a interação do homem com cada uma destas formas, pude perceber que, não fugindo ao processo natural já apresentado neste trabalho em vários momentos, a forma se revela ao homem através de alguns elementos da natureza; em outro momento, ela se impõe ao homem como necessária à construção de alguns dos seus artefatos fazendo com que aumente a proximidade entre o homem e a forma e, estando familiarizado a ela, conhecendo algumas de suas propriedades, o homem acaba usando de sua liberdade criativa e a usa livremente.

Assim, os **Macondes** cortavam de uma árvore um retângulo de casca para fabricar com isso um **recipiente cilíndrico**, no qual conservavam cereais[1]. [Figura 1.1.]

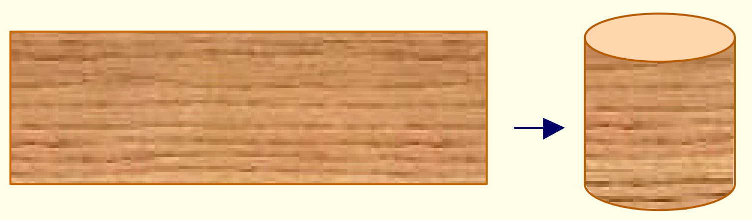


Figura 1.1.

O modo como os Macondes constroem um recipiente cilíndrico nos leva a pensar na forma cilíndrica como aquela obtida enrolando um retângulo de modo a fazer coincidir dois de seus lados opostos.

Assim, podemos trazer para nossas aulas de geometria o fato de o cilindro ser difeomorfo ao plano, o que significa que algumas propriedades do cilindro podem ser inferidas a partir de propriedades conhecidas no plano. Por exemplo,

Sabemos que o menor caminho entre dois pontos no plano euclidiano é dado pelo segmento de reta determinado por estes pontos. Dados dois pontos sobre uma superfície cilíndrica, qual seria a curva de menor comprimento que ligaria tais pontos?

[1] Gerdes, P. p. 94

O desenho em um retângulo de diversos segmentos de reta e o enrolar do retângulo para formar o cilindro, conduz ao fato de que as geodésicas do cilindro são as geratrizes, os círculos paralelos à base e as hélices. [Figura 1.2]

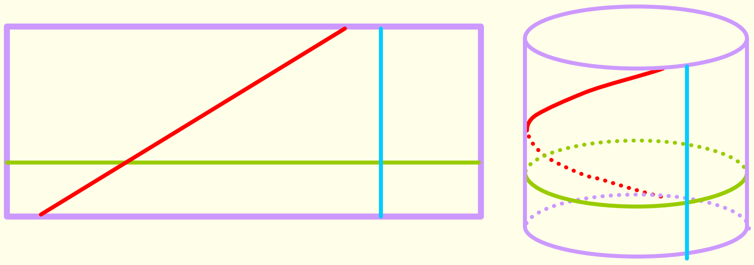


Figura 1.2.

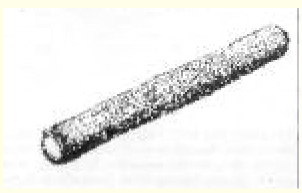
Encontramos, também, formas cilíndricas no artesanato de Angola e no *chicusa* de Moçambique. [Figura 1.3.]

(a)

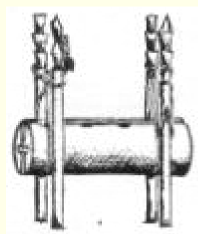
(b)

Figura 1.3

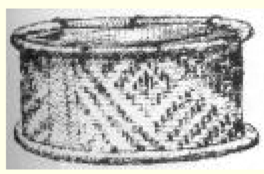
Nos instrumentos musicais dos **indígenas brasileiros,** entre seus utensílios domésticos e ornamentos pessoais. [Figura 1.4.]



(a)



(b)



(c)

(d)

Figura 1.4.

Nos ornamentos pessoais dos povos da **Mesopotâmia.** [Figura 1.5]

Figura 1.5

Em medidas de capacidade dos **egípcios** [Figura 1.6]

Figura 1.6

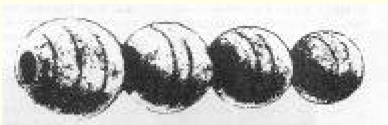
Formas **cônicas**, de **troncos de cones** e **esféricas** também são encontradas entre os instrumentos e artefatos destes povos. [Figura 1.7].

(a)

(b)

(c)

(d)



(e)

Figura 1.7

A variedade de objetos que podem ser encontrados contendo em sua composição uma das formas aqui estudadas, pode ser usada pelo professor para mostrar ao aluno como tais formas são adequadas, em alguns casos, na construção destes objetos, como por exemplo na confecção de cestos, vasilhames e instrumentos musicais, permitindo que o aluno perceba que formas geométricas básicas como cones, cilindros, esferas e outras estão diretamente ligadas ao conhecimento cultural de um povo.

5.2. Definições de Esfera, cone e cilindro

É interessante observar que a primeira definição da esfera que aparece nos textos de história da matemática da bibliografia consultada é aquela que a define como obtida pela rotação de um semicírculo em torno do seu diâmetro.

Encontramos, no livro XI dos Elementos de Euclides as seguintes definições relativas à esfera, cone e cilindro:

> Quando o diâmetro de um semicírculo permanece fixo, o semicírculo gira em torno [do diâmetro] e retorna à mesma posição que ele começou a se mover, a figura compreendida é uma **esfera**[2].
>
> Quando um lado sobre o ângulo reto de um triângulo retângulo permanece fixo, o triângulo gira em torno dele e retorna a mesma posição da qual começou a se mover, a figura compreendida é um **cone**[3].
>
> Quando um lado sobre o ângulo reto de um paralelogramo retângulo permanece fixo e o paralelogramo gira em torno dele e retorna a mesma posição da qual começou a se mover, a figura compreendida é um **cilindro**[4].

5.3. Volumes

Cálculos dos volumes de cilindros, cones e troncos de cones estão intimamente conectados à considerações correspondentes sobre prismas, pirâmides e troncos de pirâmides.

Os **egípcios** calculavam volumes de cilindros e encontramos cálculos de volumes de troncos de cones entre os **babilônios**. Com relação ao volume da esfera, as primeiras considerações que encontrei nos textos gerais de história da matemática consultados referiam-se à matemática grega e o primeiro teorema sobre a esfera é encontrado no Livro XII dos Elementos de Euclides.

5.3.1. Volume do cilindro

Na **China** uma fórmula para o volume do cilindro circular reto – chamado pelo nome de "forte circular" – é encontrada no quinto capítulo do *Jiuzhang suanshu* intitulado *Shang kung*

---

[2] Heath, T. p. 261; Katz, V. p. 91 A palavra esfera vem do grego através do latim *stereometrie*. Smith, D. E. p. 294.

[3] Heath, T. p. 261; Katz, V. p. 91

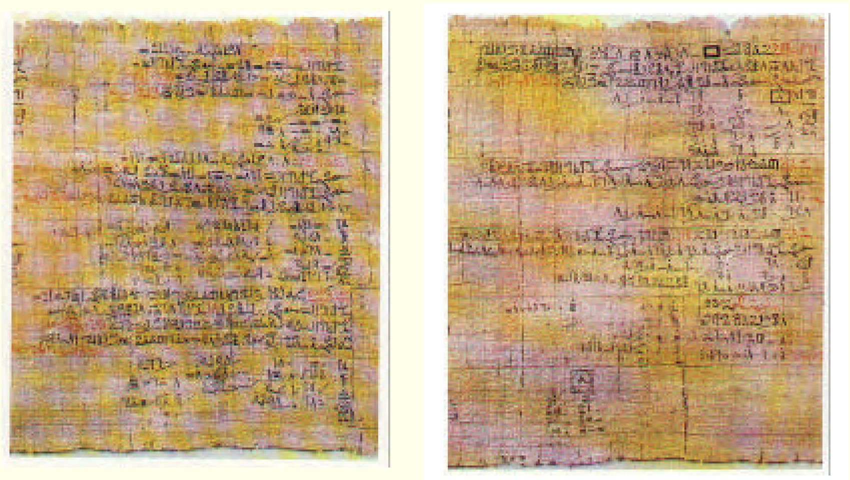
[4] Heath, T. p. 261-262

[um texto de consulta para engenheiros]. A fórmula é $V = \frac{1}{12}C^2h$ onde **C** é o comprimento da circunferência da base do cilindro e **h** sua altura.[5]

No **Antigo Egito** o cálculo do volume do cilindro aparece associado à necessidade de determinar a capacidade de celeiros cilíndricos ou depósitos de provisões. Eles sabiam que o volume de um cilindro era, como o de um recipiente retangular, igual à área da base multiplicada pela altura; então era suficiente determinar a área da base circular. É portanto, nos problemas relativos ao cálculo de capacidades de celeiros cilíndricos que encontramos o método utilizado por eles para calcular a área do círculo[6]. O método utilizado para achar o volume de um cilindro era exatamente igual ao que usamos hoje:

- Achar a área da base circular.
- Multiplicar o resultado pela altura.

Os problemas 41, 42 e 43 do Papiro Rhind [Figura 3.1] mostram tanto o método utilizado pelos egípcios como o cuidado do escriba em apresentar as respostas numa unidade de medida mais adequada para grãos.



Problemas 41-46 **Problemas 47-48; Final de 43-46**

Figura 3.1

O Problema 41 do Papiro Rhind pode ser enunciado da seguinte forma[7]:

Para um celeiro de diâmetro 9 cúbitos e altura 10 cúbitos, achar o volume.

Método utilizado pelo escriba:

---

[5] Mikami, Y. p.15; Yan, L.; Shíràn, D. p. 44
[6] Robbins, G.; Shute, C. p. 44
[7] Gillings, R. J. p. 146

- Subtrair do diâmetro [9] sua nona parte. Resultado: 8
- Multiplicar o resultado [8] por 8. Resultado: 64
- Multiplicar o resultado por 10.
- Volume: 640 cúbitos cúbicos.

O escriba expressa o resultado em uma unidade mais conveniente para grãos – o *khar*

$$1\text{cúbito} = 1\frac{1}{2}\ khar$$

Assim, o volume é

$$640 \cdot \frac{3}{2}\ \text{khar} = 960\ \text{khar} = 48 \text{ centenas de } hekats \text{ quáduplos}$$

onde

$$20\ hekats = 1\ khar$$

É interessante observar , como os valores obtidos nos problemas relativos ao cálculo do volume de celeiros apresentados pelo escriba são muito grandes, ao invés dele multiplicar por 20 para achar o resultado em *hekats* de grãos, o escriba divide por 20 e dá a resposta em centenas de *hekats* quádruplos.

De fato,

960 *khar* = 19200 *hekats* = 4800 *hekats* quádruplos = 48 centenas de *hekats* quádruplos

O problema 42, como é possível perceber, é análogo ao problema 41.

Achar o conteúdo [volume] em khar de um cilindro de diâmetro 10 cúbitos e altura 10 cúbitos.

No problema 43, terceiro problema sobre conteúdos de um celeiro cilíndrico no papiro Rhind, o objetivo do escriba é mostrar como o conteúdo [volume] pode ser encontrado diretamente em *khar*, sem passar pelo cálculo do volume em cúbitos cúbicos.

Uma discussão destes problemas em um curso de formação de professores pode servir como forma de levantar a discussão quanto à análise sobre o modo "mais adequado" para apresentar a resposta de um determinado problema e, também, mostrar um exemplo de ordem pedagógica com que um problema pode ser trabalhado. No caso:

Apresentar a solução de modo simples, resolvendo apenas a questão do cálculo do volume: a transformação da unidade de medida sendo feita após a solução do problema.

Apresentar uma solução para o problema que não precisa passar por uma etapa intermediária.

O importante aqui é trabalhar as duas formas de resolver o problema, mas permitir que o aluno utilize o método com o qual se sinta mais à vontade.

Em um curso de formação de professores é importante que o aluno se familiarize com os seguintes fatos:

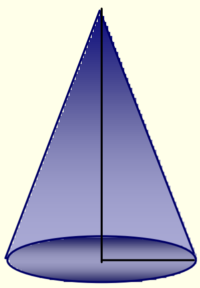
- *Podemos definir cilindro de uma forma mais geral;*
- *O volume de um cilindro qualquer pode ser calculado como área da base vezes a altura;*
- *quando os antigos calculavam o volume de uma muralha como o produto do comprimento da muralha pela área da seção de corte, isto é equivalente a calcular a área de um cilindro cuja base é a figura dada pela seção transversal da muralha e a altura é o comprimento da muralha*

Vemos aqui um exemplo onde o conhecimento histórico pode ajudar o professor a entender estágios na aprendizagem, bem como propor problemas inspirados pela história.

5.3.2. Volume do Cone

Como vimos no capítulo 2 deste trabalho, os problemas para calcular áreas e volumes no *Jiuzhang suanshu* [**China**] são exemplos práticos da época relacionados com agrimensura, levantamento de medida de campos e cálculo da quantidade de terra utilizada na construção de fortificações, diques, fossas e de vários tipos de depósitos, armazéns, etc. Os métodos de cálculo estavam relacionados portanto, às necessidades da época.

Assim, encontramos no *Jiuzhang suanshu* a seguinte fórmula para calcular o volume de um cone circular reto [Figura 3.2]:



$$V = \frac{1}{36} C^2 h$$

onde C é o comprimento da circunferência da base.

Figura 3.2

Considerando $\pi = 3$ temos[8]

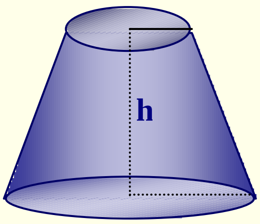
8 Yan, L; Shíràn, D. p 45

$$V = \frac{1}{36}\left[2p\ r^2\right]h = \frac{4p^2\ r^2}{36}h = \frac{4\times 3\times p\times r^2}{36} = \frac{1}{3}p\ r^2h$$

que é fórmula que conhecemos para calcular o volume do cone.

5.3.3. Volume do tronco de cone

Entre as fórmulas apresentadas para calcular volumes de sólidos na quinta seção do *Jiuzhang suanshu* [**China**] encontramos, para o cálculo do volume de um tronco de cone circular reto, a fórmula [Figura 3.3].



$$V = \frac{1}{36}\left[C_1C_2 + C_1^2 + C_2^2\right]h$$

C_1 é o comprimento da circunferência superior
C_2 é o comprimento da circunferência inferior
h a altura do tronco de cone

Figura 3.3

Tomando π = 3, e sendo $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ os raios dos círculos inferior e superior do tronco de cone, a fórmula acima é equivalente a:

$$V = \frac{1}{36}\left[2p\ r_1 2p\ r_2 + 4p^2r_1^2 + 4p^2r_2^2\right]$$

$$= \frac{p^2h}{36}\left[4r_1r_2 + 4r_1^2 + 4r_2^2\right]$$

$$= \frac{p^2h}{9}\left[r_1r_2 + r_1^2 + r_2^2\right]$$

$$= \frac{p\,h}{3}\left[r_1r_2 + r_1^2 + r_2^2\right]$$

que é a fórmula conhecida por nós para o cálculo do tronco de pirâmide.

A partir do conhecimento da fórmula chinesa para o cálculo do volume do tronco de cone e do fato de que eles usavam para p o valor 3, chegar a uma fórmula que envolva o número p permite encontrar um candidato para o cálculo do volume do tronco de cone e, demonstra-lo usando o método dedutivo.

Liu Hui em seu comentário do *Jiuzhang suanshu* relativo ao cálculo do volume do tronco de cone compara o volume de um pavilhão circular com o de um pavilhão quadrado[9]. [Figura 3.4]

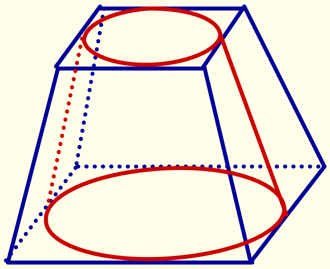


Figura 3.4

Para isso ele usa o fato de que a razão entre o volume dos dois sólidos é igual a razão entre a área do círculo e a do quadrado circunscrito, que ele usa como sendo $\frac{3}{4}$.

Assim,

$$\frac{\text{pavilhão circular}}{\text{pavilhão quadrado}}=\frac{\text{área do círculo}}{\text{área do quadrado circunscrito}}=\frac{3}{4}$$

Mas, o volume de um tronco de pirâmide é igual a

$$V_{\text{tronco de pirâmide}}=\frac{1}{3}[a^2+ab+b^2]$$

onde **a** e **b** são os comprimentos dos lados dos quadrados que formam as bases do tronco de pirâmide.

Como $a = 2r_1$ e $b = 2r_2$ segue que:

$$V_{\text{tronco de cone}}=\left[r_1r_2+r_1^2+r_2^2\right]=\left[\frac{C_1}{6}\frac{C_2}{6}+\frac{C_1^2}{36}+\frac{C_2^2}{36}\right]$$

$$=\frac{1}{36}\left[C_1C_2+C_1^2+C_2^2\right]$$

que é a fórmula chinesa para o volume do tronco de cone.

O texto **babilônico** BM85194 calcula o volume de um tronco de cone circular reto de altura $h = 6$ com circunferência inferior $C_2 = 4$ e superior $C_1 = 2$. [Figura 3.5]

---

9 Yan, L; Shíràn, D. p 73

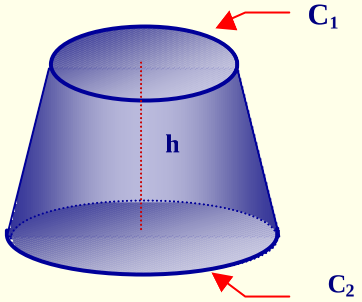


Figura 3.5

As áreas dos círculos A_1 e A_2 são calculadas como sempre[10]:

$$A_1 = \frac{C_1^2}{12} \text{ e } A_2 = \frac{C_2^2}{12}$$

Então, o volume V é calculado por um processo equivalente à aplicação da fórmula:

$$V = \frac{1}{2}[A_1 + A_2]h$$

Isto sugere que os babilônios talvez calculassem o volume de um tronco de pirâmide fazendo uma analogia com o método utilizado por eles para calcular a área do trapézio.

Seria interessante em um curso de formação de professores comparar esta fórmula com a utilizada atualmente nos livros didáticos e levantar a discussão sobre como estender fórmulas de áreas para fórmulas de volume.

5.3.4. Volume da Esfera

Com relação ao volume da esfera, as primeiras considerações que encontrei nos textos gerais de história da matemática consultados estão inseridas na parte relativa à matemática grega e, o primeiro teorema sobre esfera, localizei no Livro XII dos *Elementos* de Euclides.

Por outro lado, textos específicos sobre a história da matemática **chinesa** apresentam um método interessante para determinar o volume da esfera.

Considero que o método utilizado por Zu Geng para calcular o volume da esfera é um dos exemplos significativos da história da matemática que deve ser incluído tanto no estudo do Princípio de Cavalieri como no da Esfera.

---

[10] estão usando a fórmula $A = \frac{C^2}{12}$ onde C é o comprimento da circunferência. Ver cap. 3

O cálculo do volume da esfera tem uma longa e rica história na China. O *Jiuzhang suanshu*, por exemplo, traz fórmulas para o cálculo do volume de vários corpos e, entre estas fórmulas, está

$$V = \frac{9}{16} D^3$$

para uma esfera de diâmetro D.

Esta fórmula é aplicada na solução de dois problemas encontrados no capítulo 4 do *Jiuzhang suanshu* relativos ao cálculo do diâmetro de uma esfera com volume V conhecido.

Duas justificativas para esta fórmula aparecem na bibliografia consultada e usam de dois dos vários métodos de raciocínio utilizados pelos antigos chineses para resolver problemas[11].

- **O empírico**

Um cubo de cobre de diâmetro D igual a 1 polegada (*cun*) pesa 16 onças (*liang*), enquanto uma bola de mesmo material e mesmo diâmetro pesa 9 onças.

Assim,

$$\frac{V_{esfera}}{V_{cubo}} = \frac{9}{16} \rightarrow \frac{V_{esfera}}{D^3} = \frac{9}{16} \rightarrow V_{esfera} = \frac{9}{16} D^3$$

- **A argumentação heurística**

Um círculo ocupa $\frac{3}{4}$ da área do quadrado que o circunscreve. Passando do círculo para o cilindro circular reto de altura igual ao diâmetro do círculo e do quadrado para o cubo de aresta igual ao lado do quadrado, temos que o volume do cilindro ocupa $\frac{3}{4}$ do volume do cubo.

$$A_{círculo} = \frac{3}{4} A_{quadrado} \rightarrow V_{cilindro} = \frac{3}{4} V_{cubo} \qquad (*)$$

O volume da esfera é igual a $\frac{3}{4}$ do volume do cilindro que a circunscreve.

$$V_{esfera} = \frac{3}{4} V_{cilindro}$$

$$V_{esfera} = \frac{3}{4} V_{cilindro} = \frac{3}{4}\left[\frac{3}{4} V_{cubo}\right] = \frac{9}{16} V_{cubo}$$

[11] Martzloff, p. 285

Liu Hui apresenta esta justificativa e chama a atenção para o fato da argumentação utilizada para afirmar (*) não ser verdadeira.

Em um curso de formação de professores, considero que a discussão, da existência na história da matemática e na etnomatemática de vários métodos de raciocínio para resolver problemas, permitiria, entre outras coisas, trazer para a sala de aula uma reflexão sobre os diversos métodos utilizados pelos alunos para resolver problemas e, possibilitaria uma mudança na concepção dos professores-alunos com relação à valorização de um método específico em detrimento de outros.

Cabe aqui analisar com estes professores-alunos as vantagens ou não da utilização, na solução de um problema específico, de um determinado método e que habilidades estariam sendo desenvolvidas nos alunos do ensino fundamental e médio quando se discute ou se aplica tal método.

Apesar dos comentários de Liu Hui com relação à necessidade de verificação da razão $\frac{9}{16}$ entre o volume da esfera e do cubo de aresta igual ao diâmetro da esfera, este valor constante permanece invariante por diferentes dinastias.

O próprio Liu Hui

- Cita do *Kao gong Ji* (Os registros do artesão) a descrição da fórmula experimental e admite que esta razão precisa ser verificada;
- Assume a relação antiga:

A razão entre os volumes de um cilindro e da esfera inscrita neste cilindro é igual à razão entre as áreas de um quadrado e da seção circular da esfera inscrita neste quadrado.

- Progride dando uma exposição matemática de sua derivação;
- Aponta a imprecisão da fórmula;
- Introduz um novo *sólido* – o *mou he fang gai* – para determinar o volume da esfera;
- Admite que não pode progredir com a demonstração do cálculo do volume da esfera;
- Analisa o problema e determina as áreas de dificuldade.

Dois séculos depois dos estudos de Liu Hui relativos ao volume da esfera Zu Geng retoma a investigação e é bem sucedido na remoção das dificuldades. Para isto, ele usa o seguinte resultado na demonstração:

"desde que volumes são feitos de blocos empilhados, [segue que] se as áreas correspondentes são iguais então seus volumes não podem ser desiguais."

Este resultado é comumente conhecido como Princípio de Cavalieri após o geômetra italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) ter aplicado este método em seu trabalho *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635).

Como um auxiliar heurístico para a teoria da integração, o princípio dos indivisíveis fornece um instrumento versátil para medir figuras geométricas. Por este princípio, concebemos uma figura, de certo modo, constituída por elementos de uma dimensão mais baixa.[12]

Por exemplo, uma figura plana como composta por segmentos de reta formados por suas seções paralelas ou um sólido composto de seções planas. [Figura 3.6]

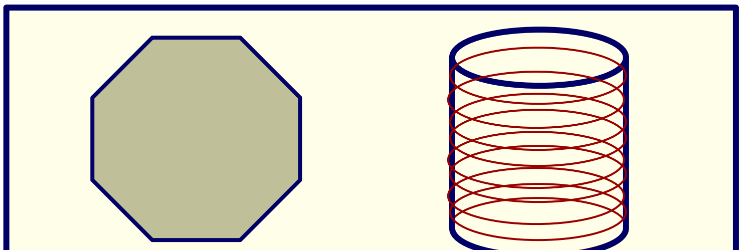


Figura 3.6

Portanto, uma propriedade da figura como um todo pode ser deduzida de uma propriedade correspondente que é encontrada em cada um de seus componentes indivisíveis.

Embora este método seja conhecido como sendo devido a Cavalieri, a técnica de medir via os infinitamente pequenos não era nova em sua época. É possível reconhecê-la nos métodos utilizados pelos geômetras chineses Liu Hui e Zu Geng e em outro mais antigo ainda, utilizado por Arquimedes para o cálculo de volumes de sólidos geométricos.

Na verdade, o uso de indivisíveis está relacionado a geômetras anteriores a Arquimedes e continuou a ser usado depois dele.[13]

A dimensão histórica conduz à idéia de que a matemática não é uma seqüência de capítulos discretos, mas uma atividade de mover-se entre diferentes modos de pensar sobre conceitos e ferramentas.[14]

A demonstração de Zu Geng

[12] Knorr, W. R. p.67
[13] Knoor, W. R. p.67
[14] Barbin, E. p. 65

- Inscreva a esfera de raio **r** em um cubo [Figura 3.7];
- Inscreva no cubo um par de cilindros cujos eixos são perpendiculares entre si e paralelos à base do cubo;
- Estes cilindros circunscrevem a esfera;
- A superfície *mou he fang gai* [dupla abóbada], interseção dos dois cilindros, também circunscreve a esfera.

Qualquer plano horizontal intercepta a dupla abóbada em um quadrado e a esfera em um círculo inscrito neste quadrado.

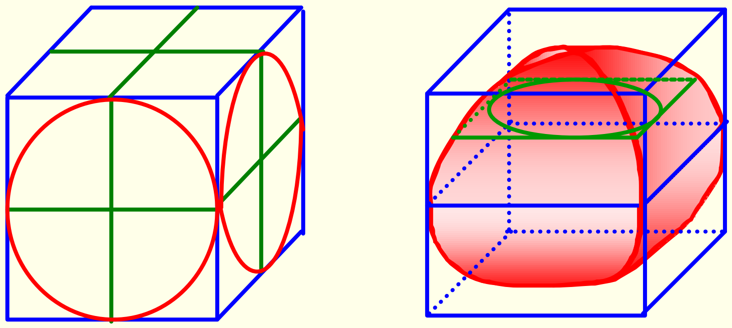


Figura 3.7

Dividindo o cubo em 8 partes iguais, cada um dos pequenos cubos da divisão fica decomposto em um oitavo da dupla abóbada mais três peças[15] [Figura 3.8].

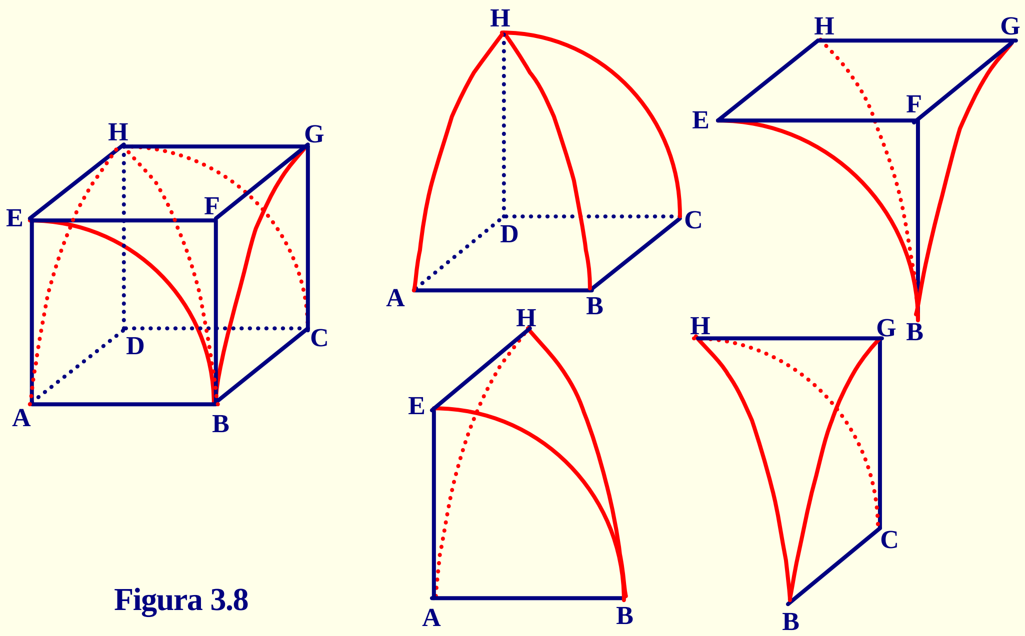


Figura 3.8

[15] Martzloff, J. C. p. 286-290; Yong , L. L.; Kangsheng, S. p. 220

Considere um plano que intercepta o cubo a uma altura **h** da base [Figura 3.9].

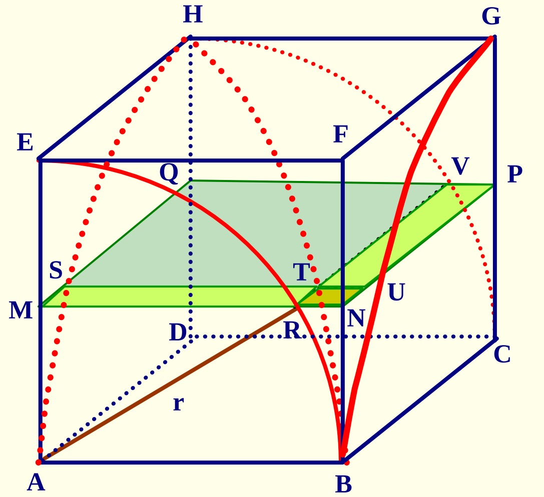


Figura 3.9

Seja MR = ST = x

Área(MNPQ) = área (STVQ) + 2 área (MRTS) + área (RNUT)

Área (STUV) = x^2 Área (MNPQ) = r^2 2Área (MRTS) + área(RNTU) = $r^2 - x^2 = h^2$

Por outro lado, a área da interseção da pirâmide com um plano paralelo à base e a uma distância **h** do vértice é: $\mathbf{h}^2$. [Figura 3.10].

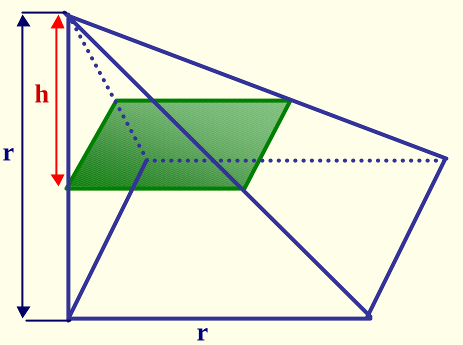


Figura 3.10

Assim,

$$V_{3\text{ peças}} = V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}r^3$$

$$V_{\frac{1}{8}\text{dupla abóbada}} = V_{\frac{1}{8}\text{cubo}} - V_{3\text{ peças}}$$

$$= r^3 - \frac{1}{3} r^3 = \frac{2}{3} r^3$$

Logo,

$$V_{\text{dupla abóbada}} = \frac{16}{3} r^3$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{p}{4} V_{\text{dupla abobada}} = \frac{4}{3} p\, r^3$$

Considero que, em um curso de formação de professores, conhecer a gênese e o desenvolvimento histórico das idéias, noções e métodos utilizados por diversas culturas para resolver os problemas que emergiram das necessidades desta cultura, daria a eles condições para trabalharem essas idéias, noções e métodos no ensino fundamental e médio.

De fato, ao propiciar aos professores-alunos a oportunidade de se familiarizarem com um dos caminhos históricos que levaram os antigos chineses da descoberta empírica de uma fórmula para o cálculo do ***volume da esfera*** *até à demonstração matemática de uma outra fórmula, alguns séculos depois da descoberta da primeira, estaríamos permitindo que estes acompanhem um processo da arte da descoberta e sintam-se encorajados a desenvolverem seus próprios processos de descobrir resultados e métodos para resolver problemas.*

Seria interessante que o professor-aluno tivesse a oportunidade, em sua formação, de comparar o método utilizado pelos chineses com os utilizados por Arquimedes e outros e, acompanhar o desenvolvimento histórico deste método através da análise dos exemplos significativos que aparecem no decorrer da história.

A dupla abóbada utilizada por Liu Hui e Zu Geng para determinar o volume da esfera não é um sólido de fácil visualização, bem como a decomposição do cubo nas 4 peças que aparecem na figura 3.8.

Sugiro que a apresentação e discussão deste assunto tenha como apoio algum material concreto que ajude a compreensão e visualização dos alunos. Assim, como resultado das minhas discussões sobre o tema com o professor e colega Guy Grebot da Universidade de Brasília, surgiu um material idealizado por ele feito com sabão glicerinado.

A dupla abóbada e um oitavo deste sólido foram construídos a partir de moldes vazados feitos com placas de metal. Estes moldes foram preenchidos com sabão glicerinado derretido em banho-maria resultando, após o resfriamento nos sólidos da figura 3.11.[16]

[16] Foto de material idealizado e construído pelo professor Guy Grebot da Universidade de Brasília.

Convém observar que devido à facilidade de cortar a dupla abóbada (em sabão) é possível obter o oitavo da dupla abóbada fazendo 3 cortes na dupla abóbada sendo o primeiro ao longo do plano paralelo à base do cubo e passando pelos pontos médios das faces não paralelas à base e os outros dois ao longo dos planos diagonais que são paralelos à base.

Meia dupla abóbada **Um oitavo da dupla abóbada**

Figura 3.11

As três peças [Figura 3.12] juntas com o oitavo da dupla abóbada formam o cubo de volume um oitavo do cubo que contém a esfera.

(a) **(b)** **(c)**

Figura 3.12

A vantagem da construção com sabão é que os alunos podem acompanhar a demonstração fazendo cortes paralelos ao plano da base, permitindo um melhor entendimento das etapas utilizadas por Zu Geng na sua demonstração.

A feitura dos recipientes que permitem construir as peças que aparecem nas figura 3.11 e 3.12 levam à solução dos seguintes problemas geométricos:

- Encontrar a curva, interseção do plano diagonal do cubo, com cada um dos cilindros;
- Projetar esta curva no plano com o objetivo de construir uma figura plana que é a planificação da superfície correspondente sobre o cilindro.

A construção das peças em madeira de balsa [Figura 3.13] tem a vantagem de não quebrarem no manuseio para a recomposição do cubo, o que acontece facilmente com as peças feitas em sabão, e, permite que os professores-alunos vejam que a semi-esfera está inscrita na metade da dupla abóbada. Além disso, é possível perceber algumas propriedades das peças como: duas delas são iguais a menos de um movimento rígido do plano [as peças **c** e **d**], que a peça **d** tem um plano de simetria, etc.

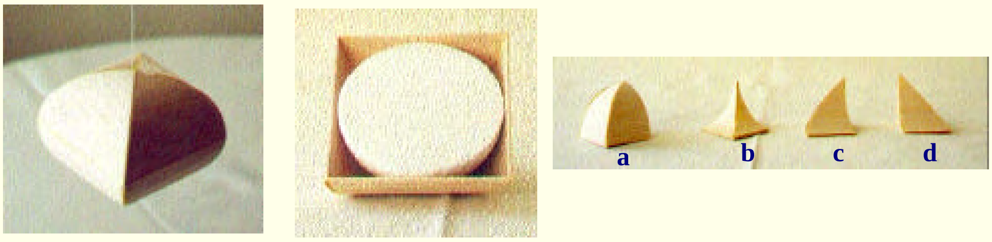


Figura 3.13

A feitura da dupla abóbada com um material conhecido como "espaguete" e utilizado em aulas de hidroginástica, permite construir a dupla abóbada cortando os dois cilindros que estão contidos no cubo e tangenciam a esfera, da seguinte forma:

- Um corte ao longo do plano de simetria do cilindro que contém a geratriz.[Figura 3.14].

Figura 3.14

- Corte ao longo de um dos planos que contém uma das diagonais do retângulo contido no semicilindro e é perpendicular a este. [Figura 3.15]

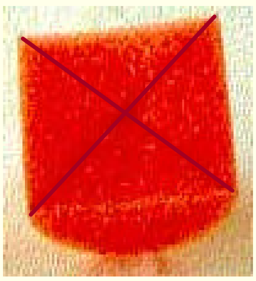


Figura 3.15

- Rearranjo das peças para formar a dupla abóbada. [Figura 3.16].

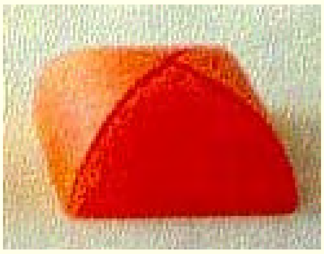


Figura 3.16

A construção desses materiais didáticos propicia, além de uma melhor compreensão dos conteúdos matemáticos discutidos neste capítulo, a exploração de outros e a discussão sobre a utilização de materiais concretos nas aulas de geometria, sua importância, critérios para a escolha de um material ao invés de outro e a variedade de materiais significativos que podem ser utilizados na discussão de um mesmo tema, dependendo do nível de escolaridade dos alunos e dos objetivos da aula.

5.4. Área de um hemisfério ou de um semicilindro?

O Problema 10 do Papiro Moscou [**Egito**] apresenta um método para calcular uma cesta que pode ser descrito deste modo:

- Se digo para ti, uma cesta com abertura de $4\ \overline{2}$ $\left[\frac{9}{2}\right]$ em seu recipiente, deixe-me saber [a área de] sua superfície;
- Calcule $\overline{9}$ $\left[\frac{1}{9}\right]$ de 9 já que o cesto é metade de um "ovo" [isto é, um hemisfério]. Resultado 1;
- Calcule o resto, 8;
- Calcule $\frac{1}{9}$ de 8. Resultado $\overline{\overline{3}}\ \overline{6}\ \overline{18}$ $\left[\frac{1}{9}8=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right]$;
- Ache o resto deste 8 depois de subtrair-lhe $\overline{\overline{3}}\ \overline{6}\ \overline{18}$. Resultado $\frac{64}{9}=7+\frac{1}{9}=7\ \overline{9}$;
- Multiplique $7\ \overline{9}$ por $4\ \overline{2}$ $\left[\frac{64}{9}\times\frac{9}{2}=32\right]$. Resultado 32. Esta é sua área. Você a encontrou corretamente.

O problema reformulado é

*Achar a área da superfície de um hemisfério de diâmetro **d*** $\left[4\frac{1}{2}\right]$.

Seguindo os passos da solução egípcia, podemos chegar à seguinte solução para o problema:

$$\frac{1}{9}2d = \frac{2d}{2} \rightarrow 2d - \frac{2d}{9} = \left[\frac{8}{9}\right]2d \rightarrow \frac{1}{9}\left[\frac{8}{9}\right]2d \rightarrow$$
$$\rightarrow \left[\frac{8}{9}\right]2d - \frac{1}{9}\left[\frac{8}{9}\right]2d \rightarrow \frac{8}{9}\left[1 - \frac{1}{9}\right] \rightarrow \left[\frac{8}{9}\right]\left[\frac{8}{9}\right]2d \rightarrow$$
$$\rightarrow \left[\frac{8}{9}\right]^2 2d \rightarrow \left[\frac{8}{9}\right]^2 2d \times d = 2d^2\left(\frac{8}{9}\right)^2$$

Assim, podemos expressar simbolicamente a solução sugerida como

$$A = 2d^2\left(\frac{8}{9}\right)^2$$

Ou seja, a área de um hemisfério é igual ao dobro da área de um círculo de mesmo diâmetro[17].

Comparando a expressão obtida pelo método egípcio com a fórmula utilizada hoje

$$A = 2p\,r^2 = \frac{1}{2}p\,d^2$$

onde **r** é o raio, encontramos que

$$\frac{p}{4} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

e

$$p = \frac{256}{81} \cong 3.16049$$

Se concordamos com esta interpretação do método egípcio

> estamos diante de uma realização mais notável do que a aplicação correta da fórmula para o volume de um tronco de pirâmide, porque a idéia de uma superfície encurvada é um conceito matemático muito avançado. Isto anteciparia o trabalho de Arquimede em cerca de 1500 anos.[18]

[17] Esta regra provavelmente surgiu da observação empírica de que ao tecer um cesto semi-esférico cujo raio é aproximadamente igual à altura, a quantidade necessária para fabricar uma tampa circular é aproximadamente igual a metade necessária para fabricar o própria cesto.

[18] Joseph, G. G. p.89

Existem, porém, dúvidas entre os historiadores da matemática acerca do objeto de cálculo neste problema. Alguns afirmam que o problema deveria ser interpretado como sendo o cálculo da área de um semi-cilindro com altura $\frac{1}{2}d$ e diâmetro da base **d**. Outros aceitam a interpretação original da cesta como um hemisfério de diâmetro **d**.[Figura 4.1]

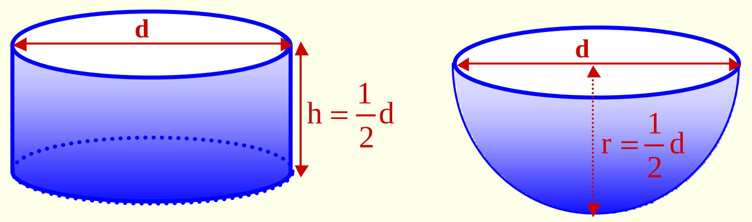


Figura 4.1

A dimensão histórica nos encoraja a pensar na matemática como um processo contínuo de reflexão e progresso ao longo do tempo ao invés de uma estrutura definida composta de verdades irrefutáveis e imutáveis.[19]

Além disso, ao apresentar o conhecimento matemático de um determinado grupo social e como eles lidaram com determinados problemas matemáticos o professor estará propiciando ao aluno a oportunidade de ver a matemática como produção cultural de determinado grupo e que essa produção depende do esforço e criatividade de toda população e não apenas de poucos indivíduos que adicionam toques finais.

5.5. Considerações Finais:

Estudos sobre o cilindro, o cone e a esfera aparecem em vários momentos da história da matemática.

Pitágoras chama a esfera de “o mais belo de todos os sólidos”; Archytas usa cones e cilindros na tentativa de resolver o problema da duplicação do cubo; Platão estudou a esfera em um certo nível e Menaecmus usa o cone para obter as cônicas parábola, elipse e hipérbole e encontra, a partir da interseção destas curvas, soluções para o problema da duplicação do cubo[20];

O famoso trabalho de Arquimedes, Sobre a Esfera e o Cilindro, diz respeito à geometria espacial, foi escrito em dois volumes e é constituído de 53 proposições. Nele encontramos que qualquer cone é a terça parte do cilindro que tem a mesma base e altura do cone; o cálculo da área de uma esfera e de uma calota esférica; mostra-se que a área de uma superfície esférica é

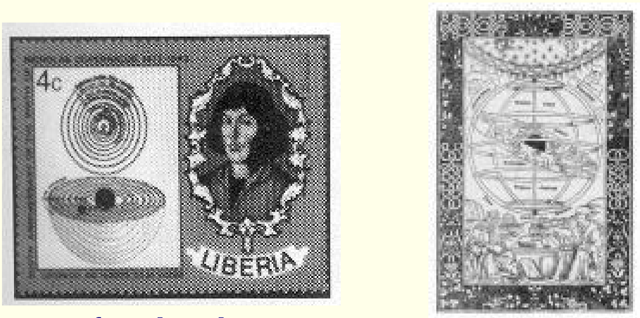
[19] Barbin, E. p.64 – HM-0099
[20] Cajori, F. p. 19, 27.

exatamente dois terços da área da superfície total de um cilindro reto circunscrito a ela e, que o volume da esfera é exatamente dois terços do volume do mesmo cilindro.[21].

Outro trabalho importante de Arquimedes é O Método. É nele que Arquimedes apresenta uma descrição das investigações mecânicas preliminares que o levaram a muitas de suas principais descobertas matemáticas[22].

Zenodorus, em seu trabalho sobre figuras isoperimétricas, afirma que de todos os sólidos tendo superfícies iguais em área, a esfera é aquele que tem o maior volume. Serenus, de Antinoeia, escreve seções do cone e cilindro.[23]

Ainda sobre a esfera temos que o primeiro modelo do universo que conecta os diversos fenômenos celestiais foi criado na Academia de Platão e consistia de duas esferas concêntricas, a esfera da terra e a das estrelas.[24] Este modelo provavelmente foi inventado por Eudoxus – uma tentativa de explicar o movimento dos planetas [a volta da terra] admitindo a sobreposição de quatro esferas concêntricas, cada uma com seu próprio eixo de rotação, com as extremidades fixas sobre a esfera envolvente – bem como, as modificações necessárias para levar em conta os vários movimentos do sol, lua e planetas.[Figura 5.1] Foi Eudoxus que introduziu o estudo de esferas na Grécia e Aristóteles registra que ele fez esferas separadas para as estrelas, o sol, a lua e os planetas. Ele também mostrou que o volume do cone é um terço do cilindro de mesma base e mesma altura e para medir o volume ele, provavelmente, desenvolveu o método da exaustão como teoria rigorosa[25]



Esferas de Eudoxus

Sistema de latitudes e longitudes de Ptolomeu

Figura 5.1

---

21 Eves, H. p. 94, Cajori, F. p. 36.
22 Boyer, C. B. p. 94; Fauvel, J. p. 156; Struik, p. 94 .A demonstração do Volume da Esfera dada em o Método de Arquimedes pode ser encontrada em Eves, H. p. 422.
23 Cajori, F. p. 42, 46.
24 Katz, V. p. 136
25 Smith, D. E. v. 1, p. 91

Temos também, a geografia de Ptolomeu e as latitudes e longitudes e seu trabalho *Mathematiki Syntaxis*, um trabalho em 13 livros que contém a descrição matemática completa do modelo grego de universo[26].

5.6. Índice de Figuras

[26] Katz, p. 136, 139, 145

5.7. Bibliografia

Arte. Artesania. Disponível em: <www.ikusa.com/Africa/arte_artesania.htm> Acesso em: 10 jun. 2003.

BARBIN, E. Integrating history: research perspectives In: FAUVEL, J.; Van MAANEN, J. **History in Mathematics Education. The ICMI Study.** 1a. ed. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. 2. p. 63-70.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução de Elza Gomide. 2a. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996. 496 p.

CAJORI, F. **History of Mathematics** New York: Chelsea Publishing Company, 1991. 524 p.

EVES, H. TRAD. DOMINGUES, H. H. **Introdução à História da Matemática** Campinas: UNICAMP, 1997. 843 p. (Repertórios.)

FAUVEL, J.; GRAY, J. (Ed.). **The History of Mathematics . A Reader** Hong Kong: Macmillam Press/The Open University, 1993. 628 p.

GERDES, P. **Sobre o Despertar do Pensamento Geométrico** 1986. Tese de Doutorado - Instituto Superior Pedagógico "Karl Friedrich Wilhelm Wander" de Dresden (RDA).<Cidade>.]

GILLINGS, R J. **Mathematics in the time of the Pharaohs** New York: Dover Publications Inc., 1972. 288 p.

JOSEPH, G. G. **The Crest of The Peacock** 2a. ed. USA: Princeton University Press, 2000. 455 p.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics. An Introduction** 2a. ed. USA: Addison-Wesley Educational Publishers Inc., 1998. 856 p.

KNORR, W. R. The Method of Indivisibles in Ancient Geometry In: CALINGER, R. **Vita Mathematica. Historical Research and Integration with Teaching.** USA: The Mathematical Association of America, 1996. p. 67-86.

MARTZLOFF, J. C. **A History of Chinese Mathematics.** Tradução de. S. Wilson. 1a. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1997. 484 p.

MIKAMI, Y. **The Development of Mathematics in China and Japan** 2a. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1910.

Other Egyptian Antiquities Disponível em: <**http://homepage.powerup.com.au/~aancient/others.htm**> Acesso em: 10 jun. 2003.

RIBEIRO, B. G. **Dicionário do Artesanato Indígena** São Paulo: EDUSP, 1988. 343 p.

ROBINS, G.; SHUTE C. **The Rhind Mathematical Papyrus. An Ancient Egyptian Text** 1a. ed. New York: Dover Publications Inc., 1987. 60 p.

SEIDENBERG, A. On the Volume of a Sphere. **Archive for History of Exact Sciences**, Berlin, v. 39, n. 2, p. 97-119, Dezembro 1988.

SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R. (Ed.). **A History of Technology. Vol. 1. From Early Times to Fall of Ancient Empires.** Inglaterra: Oxford University Press, 1958. 827 p. v. 1.

SMITH, D. E. **History of Mathematics** New York: Dover Publications Inc., 1958. 596 p. v. I.

The Thirteen Books of Euclid's Elements. Books X- XIII and Appendix. Tradução de. T. Heath. 2a. ed. New York: Dover Publications Inc., 1956. 546 p. v. III.

TRAVASSOS, E. Glossário dos Instrumentos Musicais In: RIBEIRO, D. **SUMA. Etnológica Brasileira 3. Arte Índia..** 2a. ed. Petrópolis: Vozes, 1987. p. 180-188.

YAN, L.; SHÍRÀN, D. **Chinese Mathematics. A Concise History.** Tradução J. N. Crossley; A. W.-C Lun, New York: Oxford Science Publications, 1987. 290 p.

YONG, L. L.; KANGSHENG, S. The Chinese Conception of Cavalieri's Principle and its Applications **Historia Mathematica**, v. 12, p. 219-228, 1985.

6. Simetrias

6.1. Introdução

Ao iniciar minha investigação sobre o desenvolvimento do conceito de simetria percebi que, em nenhum dos textos gerais de história da matemática consultados, e na maioria dos livros e artigos da bibliografia levantada, que tratam do conhecimento geométrico dos grupos sociais aqui estudados, o assunto é abordado. Por outro lado, pude observar, durante minha consulta a esses documentos, que várias ilustrações de artefatos, utensílios domésticos, objetos construídos por estes povos e, em muitas das suas manifestações artísticas, diversos tipos de simetrias podem ser identificadas com grande facilidade.

Assim, na busca de encontrar respostas sobre como desenvolver o estudo das simetrias em um curso de formação de professores fui naturalmente levada a construir uma proposta baseada nas diversas formas que esse assunto se manifesta tanto nas artes como nos artefatos dos povos estudados.

Apesar da constatação da pouca ou nenhuma ênfase dada ao assunto na maioria dos textos consultados, é evidente que a idéia de simetria é importante; que desde muito tempo o homem encontra a simetria nas coisas que observa e cria e que, tanto a matemática quanto a arte, ao longo do tempo, têm se utilizado desta idéia.

A simetria, às vezes se impõe como necessária para a funcionalidade de determinados objetos, como por exemplo:

- Na ponta de cristal de quartzo, provavelmente perdida por um caçador do período pré-ceramista, encontrada em Minas Gerais-**Brasil**[1] e o machado semilunar dos povos Aratú/Sapucaí, provavelmente os ancestrais das tribos Jê que ocuparam os cerrados do Brasil Central[2]. Esses machados não serviam para trabalhar a madeira. [Figura 1.1];

---

[1] Prous, A. p. 107
[2] Prous, A. p. 352

(a)

(b)

Figura 1.1

- Em um instrumento do **antigo Egito** utilizado para fazer fogo[3] [Figura 1.2];

Figura 1.2

- Em armas de sopro usadas para atirar dardos por diversos povos do sul e leste da Ásia, Indonésia e América do Sul[4]; [Figura 1.3]

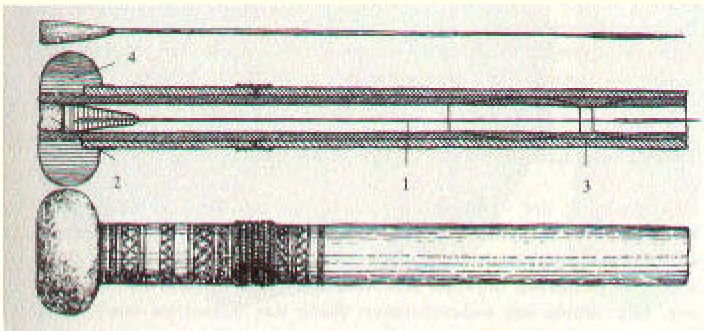


Figura 1.3

- Na roda de fiar;[5] [Figura 1.4]

---

[3] Harrison, H. S. p. 224
[4] Forde, D. p. 164
[5] Sonnemann, R. p. 152

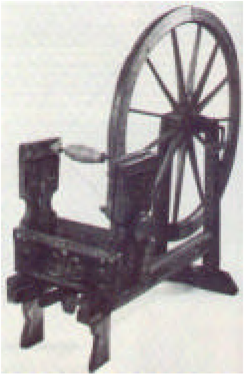


Figura 1.4

- Na carruagem egípcia[6] do séc. V. a.C. [Figura 1.5]

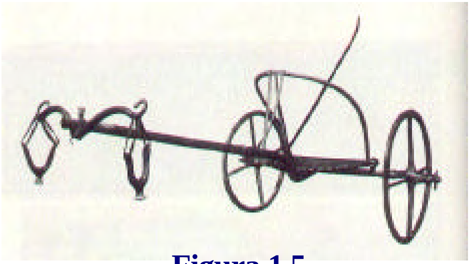


Figura 1.5

- Gerdes nos dá dois exemplos onde a simetria é necessária: na construção de um banco para subir em um tipo de palmeira e nas plataformas onde são deixados os corpos dos Yanomame[7]

Segundo Gerdes, os **índios Yanomame** usavam uma técnica interessante para colher os frutos da palmeira Bactris [Figura 1.6].

Algumas palmeiras do gênero *Bactris* podem ter o seu tronco com espinhos ou não. Elas ocorrem desde o sudeste do México até o nordeste do Paraguai. São comuns nas margens dos rios, em terras baixas das florestas chuvosas. O fruto de algumas espécies é comestível e muito apreciado e é parte da dieta da população amazônica; outras espécies são utilizadas como planta ornamental[8].

Para subir no tronco da palmeira os Yanomame construíam um banco usando duas estacas aproximadamente do mesmo tamanho, ligadas umas às outras mais ou menos no meio. Uma das extremidades das estacas é ligada à árvore com a ajuda de um liame de tal modo que,

[6] Childe, G. p. 726
[7] Gerdes, P. [1986] p. 107
[8] Henderson, A.; Galeano, G; Bernal, R. p. 135

simultaneamente, se mantém a possibilidade de empurrar o banco para cima ou para baixo [Figura 1.6].

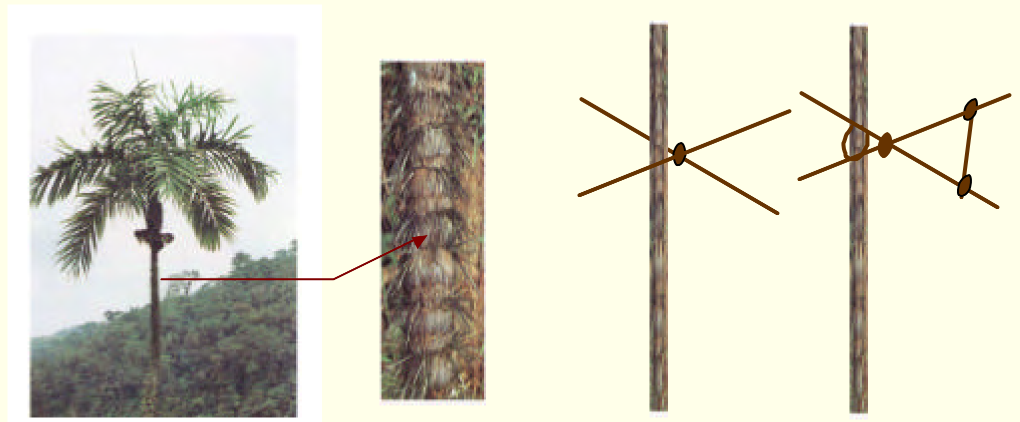


Figura 1.6

Uma terceira estaca é acrescentada impedindo que as duas primeiras se afastem demasiadamente uma da outra e também servindo de lugar para sentar ou ficar de pé. Para não virar para nenhum lado, o índio é obrigado a amarrar esta terceira estaca de modo que o triângulo formado pelas três estacas seja isósceles. Só assim ele pode garantir o equilíbrio de seu banco. Assim ele fabrica um banco para se sentar e se deslocar que o permite subir na palmeira.

A técnica de subir na palmeira envolve dois desses bancos – é impossível deslocar-se para cima (ou para baixo) ao mesmo tempo que se empurra o banco. Assim, se ele se encontra em um banco, desloca o outro para cima; transfere-se para o outro banco e puxa o primeiro para cima. Assim, o banco de subir em árvore dos Yanomame é obrigatoriamente, simétrico.

Para Gerdes,

> O simétrico, que é independente da vontade dos índios Yanomame, comum a muitos dos seus produtos de trabalho, impõe-se-lhes. Por outro lado, outros objetos também possuem a forma simétrica, sem que haja uma necessidade imediata.

No âmbito ritual , quando um Yanomame morre, o morto é envolvido em um invólucro de ramos e deixado sobre uma plataforma até que seus ossos descarnem; então, os ossos são queimados na praça da aldeia e os parentes mais próximos do falecido comem as cinzas. Tais plataformas têm a mesma forma do banco de subir na palmeira – se os triângulos da plataforma não fossem isósceles, o andaime cairia imediatamente[9]. [Figura 1.7]

[9] Gerdes, P. [1986] p. 110

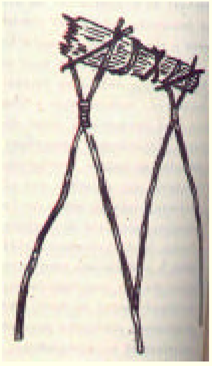
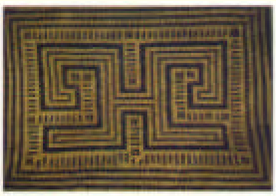


Figura 1.7

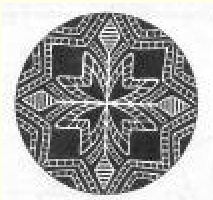
Uma das razões da incorporação da dimensão histórica ou da etnomatemática de diversos grupos sociais no estudo da geometria em um curso de formação de professores é que através delas é possível levar aos professores-alunos a perceberem como os conceitos podem ter se originado, se desenvolvido e como foram incorporados às atividades culturais de determinado grupo, e isso pode ajudar no entendimento deles.

Além disso, o conhecimento da história do desenvolvimento dos conceitos matemáticos deve fazer parte da formação dos professores para que estes tenham elementos que lhes permitam: apresentar aos alunos a matemática [a geometria] como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos bem como, conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conceitos é de grande utilidade para que o professor compreenda melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos.

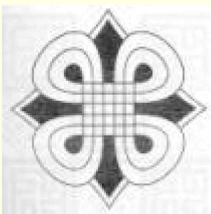
Outras vezes, o homem utiliza a simetria sem que esta se imponha ou seja necessária como no trançado dos índios Wayana – Brasil; na decoração de vasos **egípcios**; no padrão em tecidos de Ghana na África do Sul e na decoração do antigo vaso **chinês.** [Figura 1.8]



Indígenas Brasileiros



Egito



África

China

Figura 1.8

Há muita simetria na música – como também muita quebra de simetria – na escultura, na pintura e no desenho.

Assim, a noção de simetria pode ser utilizada para descrever e entender os padrões que acontecem na arte e nos artefatos pertencentes à cultura de cada povo.

Neste capítulo apresento algumas sugestões de como podemos nos utilizar da cultura de diversos povos para estudar as simetrias e as isometrias do plano e suas propriedades.

Ao observar as formas de expressão artística dos indígenas brasileiros pude perceber uma ênfase no uso de formas geométricas para decorar seus rostos, corpos, cerâmicas, armas, cestos e outros objetos. Além disso, pude identificar, em muitas destas composições artísticas, a presença de diversos tipos de simetrias. Portanto, uma ênfase será dada a esta cultura, neste capítulo.

Dar acesso aos professores-alunos aos modos como as várias sociedades trataram com conceitos e idéias geométricas em sua vida prática e intelectual, permite explorar a geometria como um meio estético e construtivo onde transformação e relações geométricas dominam.

6.2. O Conceito de Simetria

Em geral a palavra simetria tem dois significados:

- Harmonia resultante de certas combinações e proporções regulares[10]. Alguma coisa bem proporcional, harmônica, balanceada. A idéia de beleza está ligada à de simetria.

De acordo com Weyl, o escultor e arquiteto grego Policleto, que escreveu um trabalho sobre a teoria das proporções e a quem os antigos elogiavam pela perfeição harmônica de suas esculturas, usa a palavra simetria[11]. Neste sentido a idéia não se restringe a objetos.

- Disposição de duas figuras que se correspondem ponto por ponto de tal sorte que dois pontos correspondentes de uma e da outra estejam em igual distância de um ponto, uma reta ou de um plano dado.

Com relação à utilização da simetria por diversas culturas podemos dizer que ela pode:

- Ser usada como uma coisa em si e, neste caso um objeto, artefato ou composição artística pode ter um ou vários planos de simetria; ter um ou vários eixos de simetria ou ser simétrico em relação a um ponto;

---

[10] Koogan, A.; Houaiss, A. p. 780
[11] Weyl, H. p. 3

- Servir como instrumento de leitura e confecção de um artefato, objeto ou composição artística de uma cultura.

Muitos artefatos, objetos ou composições artísticas não são necessariamente simétricos, mas podemos encontrar diversas simetrias e também assimetrias em vários dos seus elementos ou na disposição desses elementos no trabalho como um todo. Por exemplo, no desenho *yajé* [Figura 2.1] – cultura Siona – feito por Estanilao Yaiguaje[12].

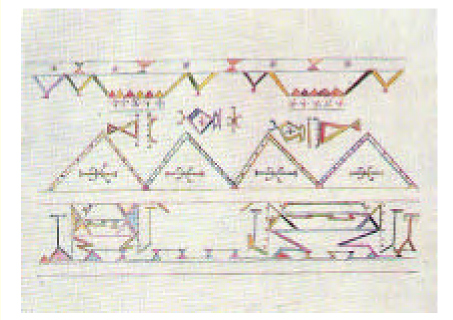


Figura 2.1

Neste desenho podemos identificar translações e reflexões sem que a composição como um todo seja simétrica.

O estudo das simetrias em um curso de formação de professores deve:

- *abordar as duas formas de uso da simetria pelos povos;*
- *tomar como ponto de partida os exemplos deixados pelos povos do mundo inteiro, através de seus artefatos, sua arte e sua matemática, para fazer o estudo das simetrias e isometrias do plano e suas propriedades.*

6.2.1. Simetria em relação a uma reta

Em uma análise de alguns dos desenhos *yajé*[13] feitos em lanças pelos índios Siona é possível perceber – e isto pode ser feito experimentalmente utilizando um espelho – que se colocamos um espelho apoiado sobre a reta **r** [Figura 2.2] e perpendicular ao plano do desenho vemos que cada ponto de um lado tem seu correspondente do outro lado da reta. Isto significa que o desenho é simétrico em relação à reta r.

---

[12] Langdon, J. p. 79

[13] Desenhos que provêem das visões resultantes da ingestão da bebida alucinógena *yagé* que é o principal meio de contato dos índios Siona com seres sobrenaturais. Langdom, J. p. 77.

A transformação que associa cada ponto do objeto ao seu simétrico em relação à reta **r** é chamada de reflexão e trataremos dela mais adiante. O eixo de simetria é também chamado de eixo de reflexão.

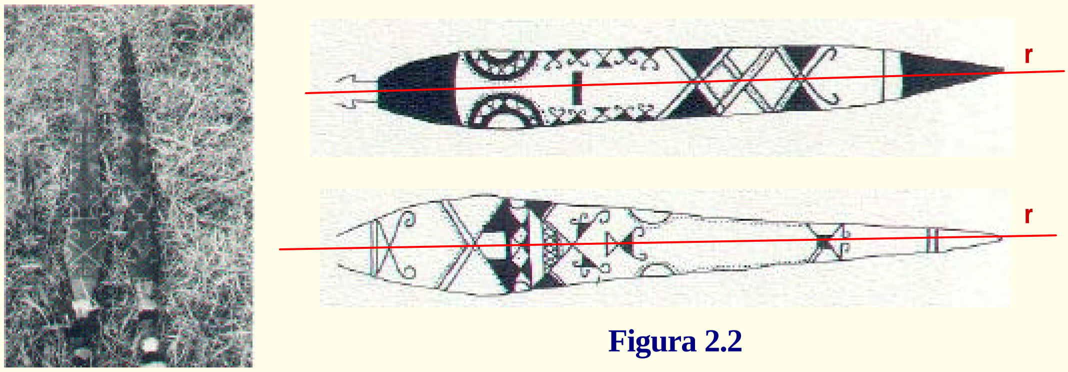


Figura 2.2

Muitas figuras ou objetos são **simétricos em relação a uma ou mais retas** (do plano ou do espaço) que se chamam **eixos de simetria**. Por exemplo, o desenho Asurini[14], os motivos do desenho dos Kayapó-Xikrin[15] e a apá nº. 1 dos índios Kayabi[16] possuem, respectivamente, um, dois e quatro eixos de simetria [Figura 2.3].

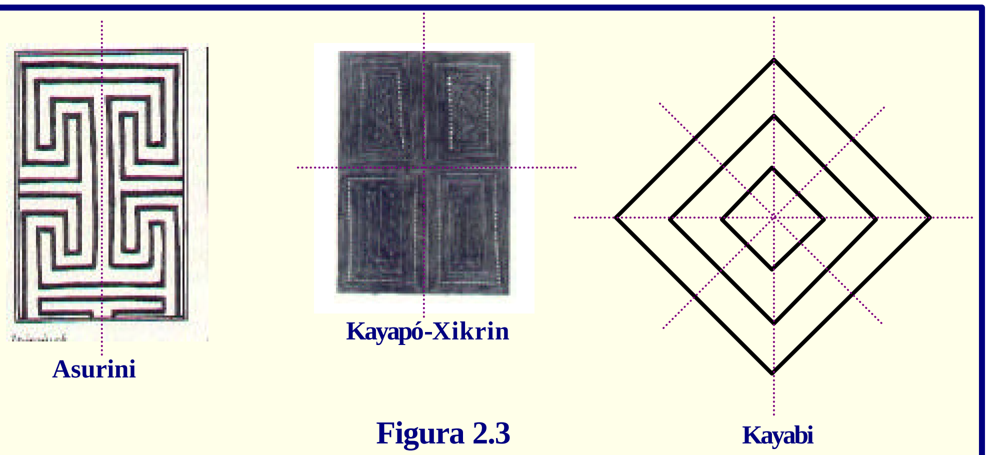


Figura 2.3

6.2.2. Simetria em relação a um plano

A **simetria bilateral**, ou simetria de esquerda e direita é evidente na estrutura dos animais superiores, especialmente no corpo humano[17]. A forma do corpo humano tem um **plano de simetria**. Dizemos que um objeto tem um plano de simetria se cada ponto do objeto tem um correspondente do outro lado do plano. O plano de simetria também funciona como um espelho.

[14] Muller, R. P. p. 242
[15] Vidal, L. p. 177
[16] Scandiuzzi, P. P. p. 111
[17] Weyl, H. p. 3

É importante observar que, quando dizemos que a simetria bilateral é evidente na estrutura de certos animais, em especial do corpo humano, estamos tomando como exemplo a aparência externa tantos dos animais como do ser humano.

Stewart[18] observa que "A simetria bilateral da forma humana é apenas aproximada: o coração não é central, nem os dois lados da face são idênticos".

Uma definição mais precisa pode ser dada como segue:

Seja *a* um plano e **P** um ponto do espaço. O simétrico de **P** em relação a *a* é um ponto **P'** tal que a distância de **P** a *a* é igual a distância de **P'** a *a* . [Figura 2.4]

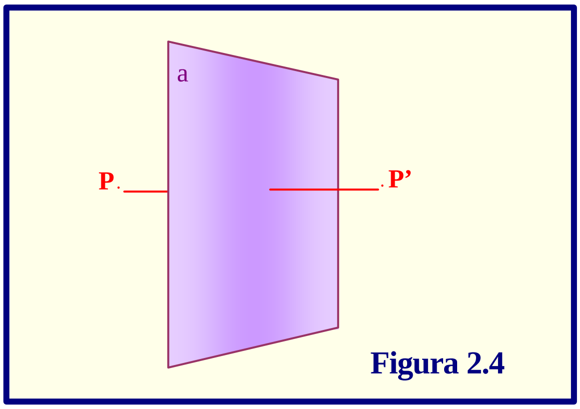


Figura 2.4

Ou seja, a simetria em relação a um plano α é uma transformação T_α: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que a cada ponto **P** do espaço sua imagem **P'**= T(P) é tal que d(P, α) = d(P, α).

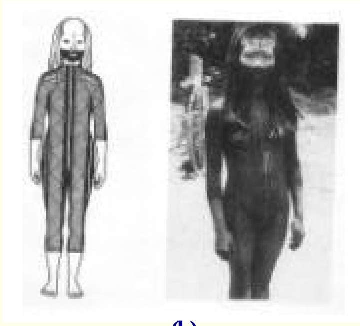
Uma configuração espacial (**K**) tem um plano de simetria ou tem uma simetria bilateral se existe um plano α tal que $T_\alpha(K) = K$.

Ter plano de simetria é uma condição necessária à funcionalidade de muitos objetos, como os das figuras 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 e 1.5.

Quando observo as pinturas corporais dos indígenas brasileiros fica evidente a utilização da simetria do corpo humano na disposição dos desenhos. Por exemplo, o desenho *yajé* no rosto do *xamã* – esses desenhos, segundo Langdom, são cópias daqueles vistos adornando os espíritos e seus objetos durante os rituais[19]; na pintura corporal da índia Kayapó-Xikrin[20] e na pintura corporal Karajá onde se evidencia a presença de linhas curvas[21][Figura 2.5]

[18] Stewart, I. p. 61
[19] Langdon, J. p. 75
[20] Vidal, L. p. 150
[21] Toral, A. A. p. 194

(a)



(b)

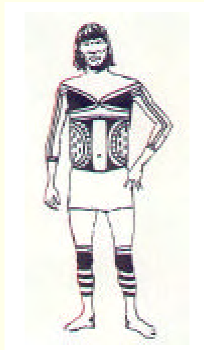


Figura 2.5

(c)

Exemplos de simetrias bilaterais são encontrados em todas as civilizações aqui estudadas.

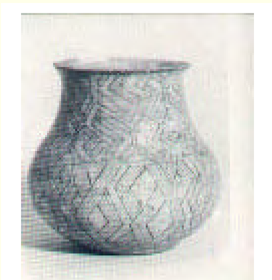
- Nas peças de cestaria dos **indígenas brasileiros.** [Figura 2.6]

Cesto Ticuna

Cestos

Figura 2.6

- Nos vasos de cerâmica dos **indígenas brasileiros**. [Figura 2.7]



Vaso Asurini p/ depositar mel

Pote Siona

Cerâmica Asurini utilizada nos principais rituais

Peças de cerâmica Kadiweu

Figura 2.7

Convém chamar a atenção dosprofessores-alunos que esses objetos possuem uma infinidade de planos de simetria – uma característica das superfícies de rotação – que contêm o eixo de rotação da superfície. Pode emergir da análise dos objetos encontrados nas diversas culturas e da idéia de superfície de rotação uma variedade de exemplos de superfícies de rotação que são encontradas nos objetos construídos por diversas culturas e que são distintos do cilindro, do cone e da esfera estudados no ensino médio.

6.2.3. Simetria em relação a um ponto

Uma figura pode não ter nenhum eixo ou plano de simetria, como por exemplo, o padrão decorativo aplicado à cerâmica utilizado pelo índios Kadiweu[22] [Figura, 2.10]

Por outro lado, uma análise da figura é possível perceber que qualquer que seja o ponto **P** da figura, existe um ponto **P'** na figura tal que d(P, O) = d(P', O) onde **O** está indicado na figura 2.8. Neste caso dizemos que a figura é simétrica em relação ao ponto **O**.

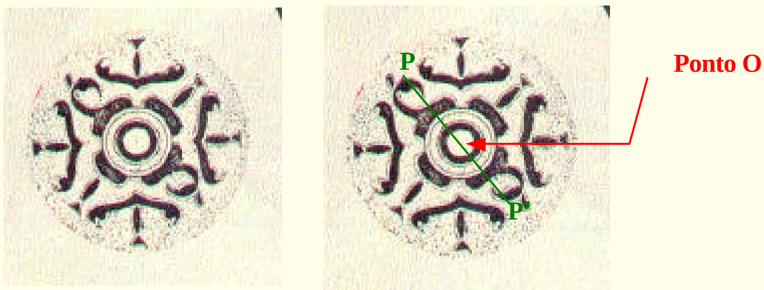


Figura 2.8

A simetria em relação a um ponto pode ser encontrada na composição do padrão de pintura facial e no de pintura corporal dos índios Kadiweu[23]. [Figura 2.9]

Pintura Corporal

Pintura Facial

Figura 2.9

[22] Lima, T. A. p. 224
[23] Ribeiro, D. pp. 29, 49

Ela também pode ser identificada no desenho feito por artista Kadiweu para decoração de potes e couro[24]. [Figura 2.10]

Figura 2.10

6.3. Isometrias do plano

Uma **isometria** do plano é uma função bijetora $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva distâncias, isto é, se **P**, **Q** são dois pontos do planos então,

$$d(P,Q) = d(T(P),T(Q))$$

Uma isometria é um movimento rígido porque não deforma a figura.

Existem quatro tipos de transformações no plano que são isometrias: a translação, a reflexão, rotação e reflexão-deslize e, todas elas podem ser encontradas na arte e artesanato dos povos aqui estudados.

6.3.1. Translação

O movimento de **translação** faz parte de várias atividades das quais participamos como por exemplo, descer e subir um elevador ou escada rolante, abrir e fechar gavetas, abrir e fechar janelas ou portas de correr e no deslocamento de determinados tipos de cortinas.

“As translações são transformações que fazem os objetos deslizarem ao longo de uma direção sem que eles girem”[25].

Uma **translação** de vetor $\vec{v}$ é uma transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que para todo ponto P e P’=T(P) temos $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.

A demonstração de que uma translação é uma isometria pode ser feita utilizando algumas propriedades de paralelogramos[26].

[24] Siqueira Jr, J. G. p. 269
[25] Stewart, I. p. 63
[26] Uma demonstração pode ser encontrada em Wilmer, C. p. 132

O conceito de translação pode ser utilizado na interpretação e análise dos trabalhos artísticos e artesanais de todos os povos e na busca de meios para reconstruí-los. Além disso, muitas propriedades geométricas podem ser discutidas a partir destes trabalhos.

Os desenhos geométricos da arte Asurini cobrem diferentes formas e superfícies: o corpo, os potes de cerâmica e as cabaças recortadas. Na arte gráfica Asurini observam-se desenhos que podem ser executados livre e infinitamente.[27] Nos modelos que analiso a seguir, apesar do desenho estar limitado por um retângulo, deve-se imaginar que esta é uma limitação física, mas que o desenho se expande infinitamente. O exemplo da Figura 3.1 chamado pelos índios de *Ipirapekonyna* pode ser construído pela translação do padrão na direção do vetor $\vec{v}$ destacados na figura 3.1

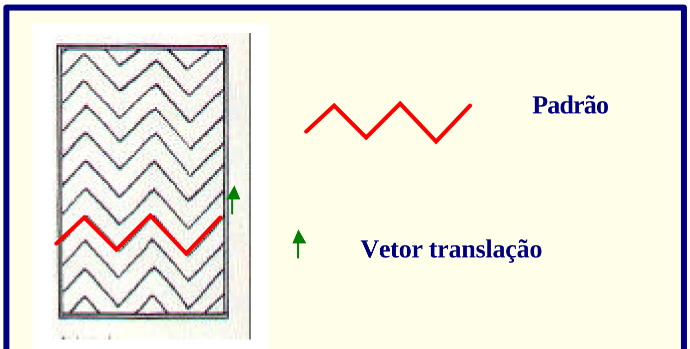


Figura 3.1

Outros exemplos de translação podem ser encontrados entre os motivos decorativos de faces dos indígenas Kaipó-Xikrin[28]. A presença do paralelismo é marcante nesses modelos. [Figura 3.2]

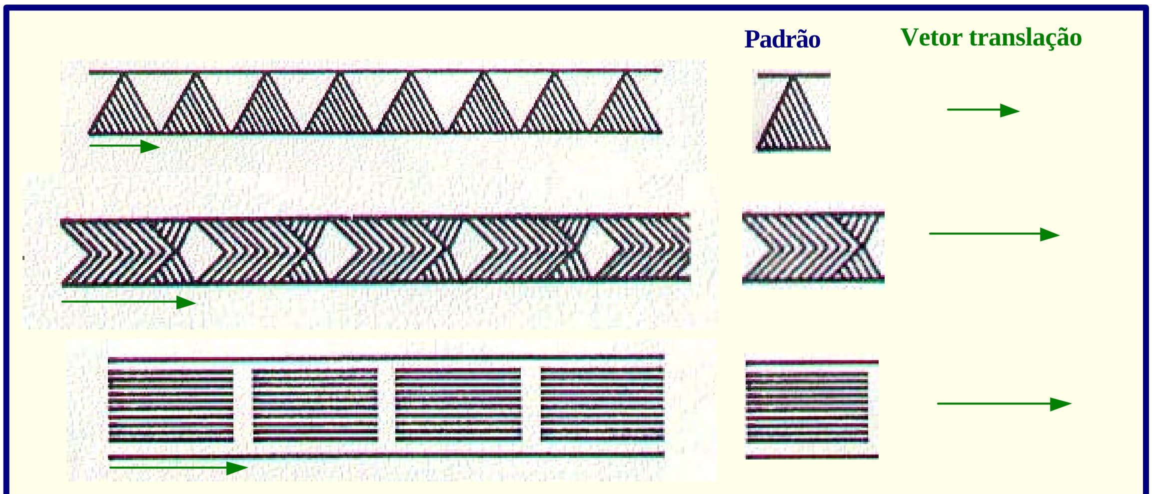


Figura 3.2

[27] Muller, R. p. 242
[28] Vidal, L. p. 150

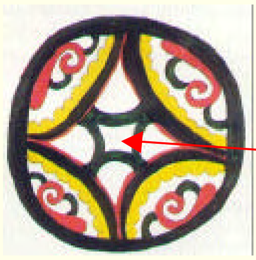
6.3.2. Rotação

O movimento de rotação também é muito familiar. Ele ocorre no abrir e fechar de uma porta ou janela com dobradiças, e no girar de uma chave na fechadura.

Dado um ponto **O** (centro de rotação) e um ângulo q, orientado com o sentido horário ou com o sentido anti-horário, a rotação de centro **O** e ângulo q é a transformação R_θ: $□^2 \to □^2$ para todo ponto P e P'= R_θ(P) temos:

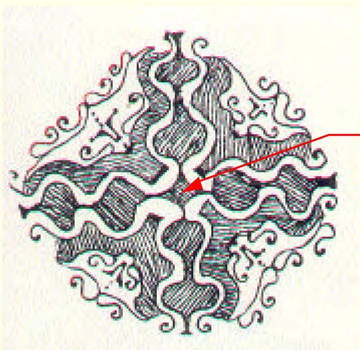
- □ POP' e q são congruentes
- OP' = OP
- O'= O

Uma rotação é uma isometria, portanto, um movimento rígido do plano e também pode ser encontrada nas composições de vários desenhos.



Índios Kadiweu
Desenho para decoração de abanico
Ângulo de rotação: 90º.
Centro:
Padrão:

Figura 3. 3



Índios Kadiweu
Padrão decorativo para pintura facial
Ângulo de rotação: 180º.
Centro
Padrão:

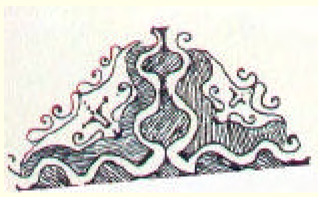
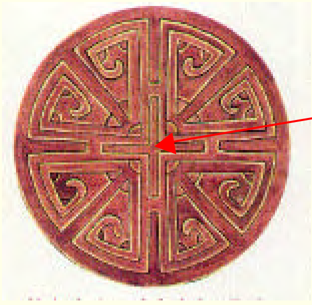


Figura 3.4



Índios Wayana
Motivo de pintura de fundo de vasilha de cerâmica.
Ângulo de rotação: 90º.
Centro
Padrão:

Figura 3.5

Aqui é interessante observar que se R_q *é a rotação de ângulo* q *e* $R_q^k = \underbrace{R_q \circ R_q \ldots\ldots \circ R_q}_{\text{k vezes}}$

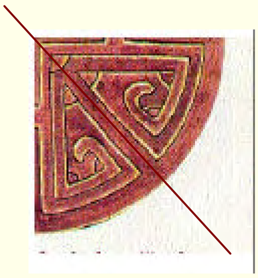
então, para $q = \dfrac{360^\circ}{n}$, *n inteiro positivo,*

$R_q^k \neq R_q^j$ se $j \neq k$; $j, k = 1, \ldots, (n-1)$ e $R_q^n = i$ *onde i é a aplicação identidade do* $\mathbb{R}^2$.

Isto significa que o conjunto das rotações de ângulo $q = \dfrac{360^\circ}{n}$ *em torno de um ponto O com a operação usual de composição de funções é um grupo cíclico de ordem n.*

6.3.3. Reflexão

Observe que o padrão utilizado para construir a figura 3.5 pode ser obtido a partir do padrão [Figura 3.6] e uma reflexão em relação ao eixo.



Padrão

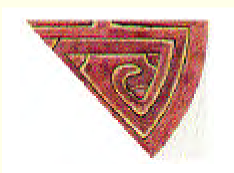


Figura 3.6

Dada uma reta **r**, chamada eixo de reflexão, a reflexão é uma transformação $r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que para todo **P** associa o ponto **P'** = r(P) satisfazendo as seguintes propriedades:

- Se $P \notin r$ então r é a mediatriz de PP'
- Se $P \in r$ então P'= P.

Uma reflexão é uma isometria, e portanto, um movimento rígido do plano.

Encontramos reflexões nos seguintes exemplares da arte e artesanato indígena:

- na apá do povo Kayabi[29] tem dois eixos de reflexão e pode ser construída a partir do padrão mostrado na figura 3.7;

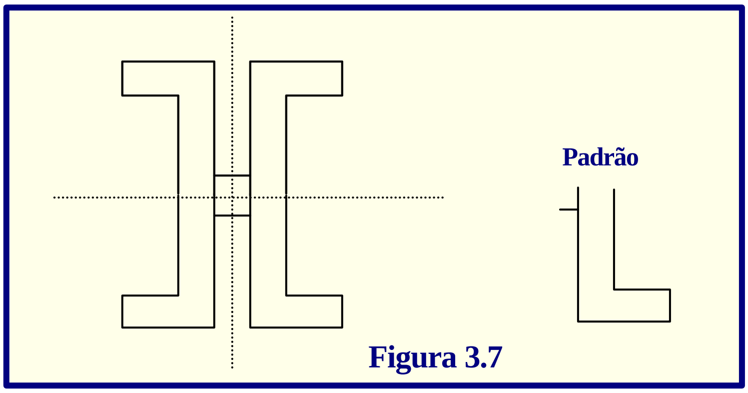


Figura 3.7

- Nos desenhos decorativos de peças de cerâmica dos índios Asurini do Xingu[30]. O padrão também tem um eixo de reflexão e pode ser construído a partir de um padrão mais simples. [Figura 3.8].

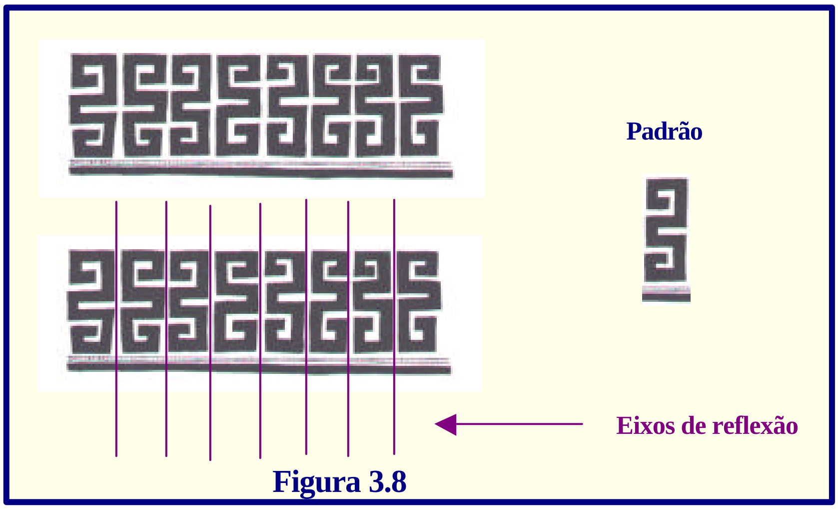


Figura 3.8

Através deste desenho é possível observar que a composição de duas reflexões com eixos de reflexão paralelos é igual a uma translação de vetor perpendicular a esses eixos.

Um outro exemplo que encontramos na cultura indígena é o que aparece na apá nº. 7 dos índios Kayabi e é um exemplo de figura que tem simetria de rotação de 180º e não tem simetria bilateral[31] [Figura 3.9].

[29] Scandiuzzi, P. P. p. 110
[30] Muller, R. P. p. 239
[31] Sacandiuzzi, P. P. p. 116

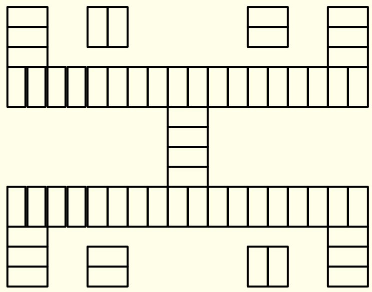


Figura 3.9

É interessante também, retomar os exemplos discutidos no estudo dos outros tipos de isometrias para verificar se encontramos neles ou em seus padrões também reflexões. A percepção de que a maioria dos exemplos encontrados nas diversas culturas contêm várias noções geométricas é importante e pode levar a uma mudança na postura do professor-aluno que às vezes, na utilização e escolha dos exemplos, apenas destaca aquilo que pretende ensinar sem levar em conta a quantidade de outras informações que podem ser exploradas no mesmo exemplo.

6.3.4. Reflexão-deslize

Considere o seguinte motivo decorativo da face dos índios Kaypó-Xikrin [Figura 3.10] e tome como padrão do desenho o pequeno retângulo coberto que aparece em destaque na Figura 3.10. Um método para construir o motivo a partir do padrão seria aplicando sucessivamente as seguintes transformações:

- Reflexão do retângulo padrão em relação ao eixo **r**
- Translação de vetor $\vec{v}$ da imagem refletida.

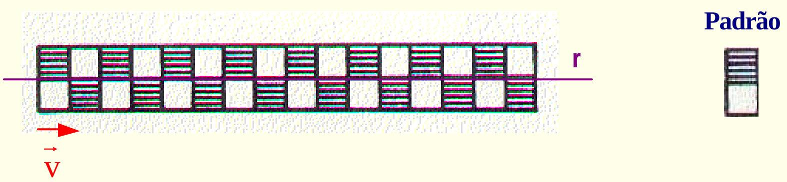


Figura 3.10

De modo análogo, a parte superior do desenho decorativo de peças de cerâmica dos Asurini pode ser construído a partir do padrão destacado na figura 3.11 através de sucessivas reflexões em relação à reta **r** seguidas de translações do vetor $\vec{v}$. Nesse caso, é impossível reproduzir o modelo a partir do padrão escolhido, utilizando apenas translações.

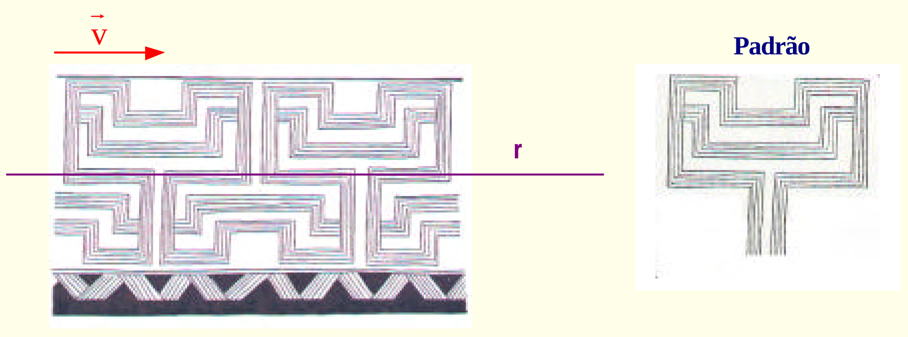


Figura 3.11

Uma **reflexão-deslize** é uma reflexão seguida de uma translação na mesma direção do eixo.

A matemática não é apenas um texto; ela vive na mente do povo e pode, até certo ponto, ser descoberta pela interpretação dos artefatos que eles produziram. Estes artefatos, inscrições, instrumentos, livros e dispositivos foram desenvolvidos em lugares particulares por razões particulares, e o entendimento destas razões deve ajudar os estudantes a relacionar as idéias matemáticas a algo maior que seu próprio ambiente imediato.[32]

Considero que o estudo das isometrias do plano em um curso de formação de professores deveria conter exemplos de desenhos ou composições geométricas que não são necessariamente simétricos, mas que contêm a simetria em algumas de suas partes ou na distribuição das figuras que fazem parte da composição como um todo. Vários exemplos deste tipo podem ser encontrados na arte dos indígenas brasileiros. Por exemplo:

- O desenho para decoração de prato[33] Kadiweu [Figura 3.12] é dividido em 4 partes simétricas. As partes 1 e 3 são simétricas em relação à reta **r** e possuem simetria de reflexão (exceto com as cores) com eixo de reflexão paralelo à reta **r**; as partes 2 e 4 são simétricas em relação à reta **s** e cada uma delas têm dois eixos de simetria perpendiculares e possuem simetria de rotação de 90°.

---

[32] Grugnetti, L & Rogers L. p. 46
[33] Siqueira Jr., J. G. p. 269

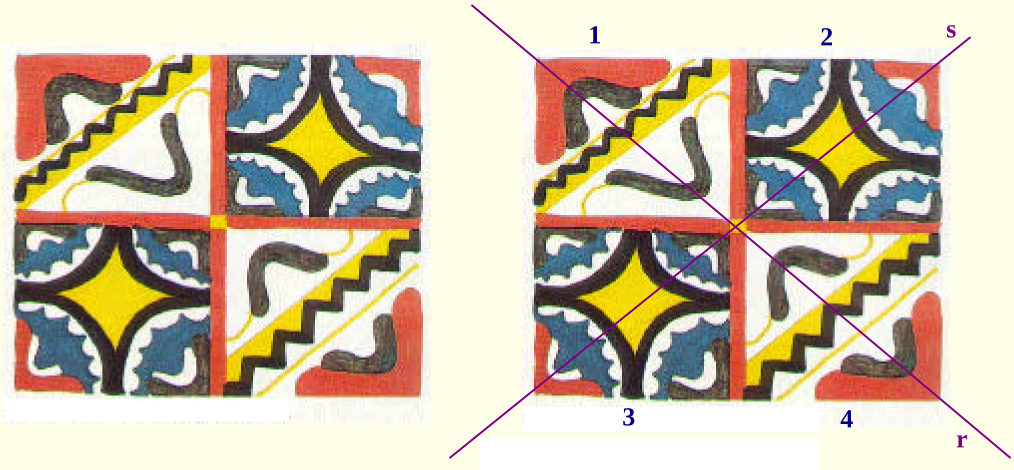


Figura 3.12

- No desenho de roda de teto os motivos da iconografia Wayana[34] estão numa disposição simétrica dois a dois em relação a eixos ortogonais [Figura 3.13]. O motivo 3 é a imagem do motivo 1 por uma rotação de 180^o, o motivo 2 é simétrico em relação à reta **r**; os motivos 1 e 3 são simétricos em relação à reta **s** e o motivo 4 é assimétrico.

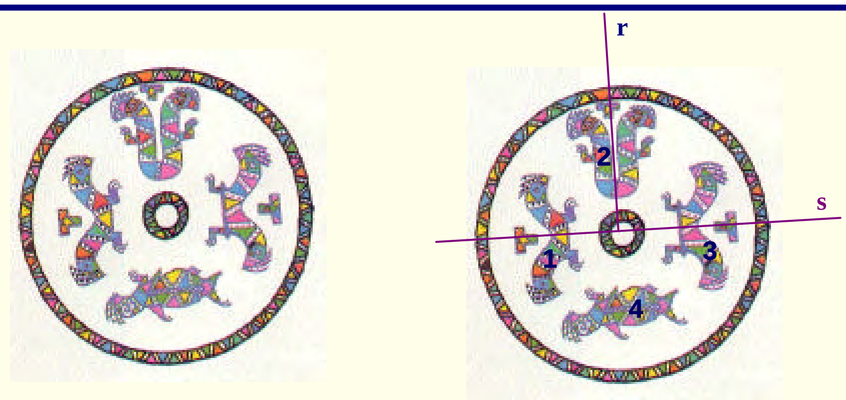


Figura 3.13

A variedade de composições artísticas que podem ser utilizadas para o estudo das isometrias do plano em um curso de formação de professores que pertencem à cultura dos indígenas brasileiros é muito grande.

A utilização da etnomatemática dos povos indígenas brasileiros pode levar os professores em formação a perceberem que eles têm uma herança cultural local de seus antecessores e das demais culturas que compõem o que chamamos de povo brasileiro e, a importância de se utilizarem deste conhecimento nas aulas de geometria do ensino fundamental e médio, tanto no ensino-aprendizagem do conhecimento geométrico, quanto na valorização da nossa diversidade

34 van Velthem, L. H. p. 60

cultural e no desenvolvimento de atitudes de respeito e consideração por todos esses povos e culturas.

6.4. Exemplos de Simetrias em Algumas Culturas Africanas

Outras culturas também possuem uma variedade de exemplos que podem ser utilizados e incorporados a este estudo. A seguir, apresento exemplos da outras culturas **africanas** que podem servir de auxílio neste estudo.

As simetrias na arte africana aparecem em tecidos, em objetos de bronze ou cerâmica, em pipas, em desenhos feitos na areia, na cestaria, etc. e estes exemplos de objetos, artefatos e composições artísticas encontrados na cultura de diversos povos africanos podem ser utilizados no ensino-aprendizagem das simetrias, tanto em um curso de formação de professores como na preparação de atividades a serem desenvolvidas no ensino-fundamental e médio.

- Exemplos de simetria bilateral são encontrados nas facas Fulani, no pente decorativo de Ghana, na escultura Ioruba, e na máscara Tchokwe. [Figura 4.1]

(a) (b) (c) (d)

Figura 4.1

- Os desenhos *sona*

A tradição *sona* pertence à herança Tchokwe e povos vizinhos no leste de Angola, noroeste de Zâmbia. Estes desenhos são chamados *lusona* (singular) ou *sona* (plural). São os meninos que aprendem o significado e execução dos desenhos mais fáceis durante o ritual de iniciação e os sona mais complicados são transmitidos por "especialistas" para seus descendentes machos. Estes especialistas são "contadores de histórias" que fazem desenhos na areia para ilustrar provérbios, jogos, adivinhas e animais.[35]

---

[35] Gerdes, P. [1996] p. 7

De acordo com Gerdes, para facilitar a memorização dos desenhos padronizados, os especialistas utilizam a seguinte mnemônica:

- Limpam e alisam o chão;
- Marcam com as pontas dos dedos uma grade ortogonal de pontos eqüidistantes;
- Traçam uma ou mais linhas que envolvem os pontos da grade de referência.

Muitos destes desenhos pertencem a uma velha tradição e desempenham um papel importante na transmissão do conhecimento e da sabedoria de uma geração para a seguinte.

Os *sona* 1 e 2 da figura 4.2 são usados por caçadores Tchokwe como amuleto de caça. Os dois são compostos por dois desenhos monolineares iguais ao desenho 3 que tem simetria rotacional de 180^o e simetria em relação a um ponto. O *lusona* 1 tem dois eixos perpendiculares de simetria e o *lusona* 2, muito semelhante ao 1, tem apenas um eixo de simetria[36].

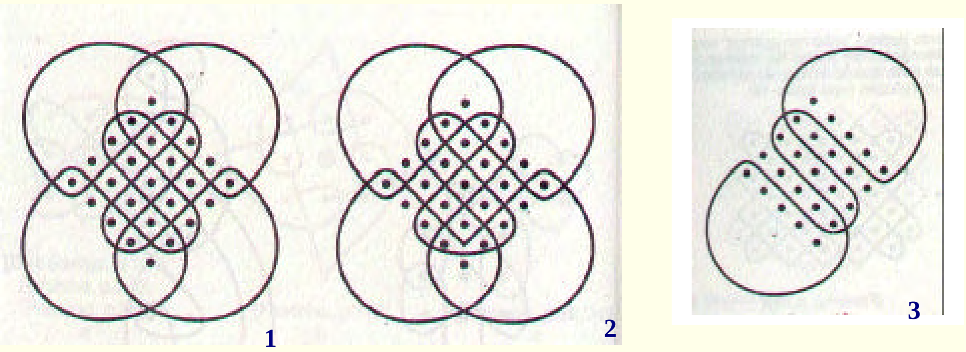


Figura 4.2

Um desenho é **monolinear** quando é composto por uma única linha; uma parte da linha pode cruzar com outra parte, mas nunca pode "tocar" una outra parte. O conceito de monolinearidade é diferente do de gráfico de Euler utlizado em Teoria dos Grafos onde é permitido que duas partes da linha se "toquem"[37]. [Figura 4.3].

[36] Gerdes, P. [1993 v. 1] p.. 24 e 25
[37] Gerdes, P. [1993 v. 1] p. 15

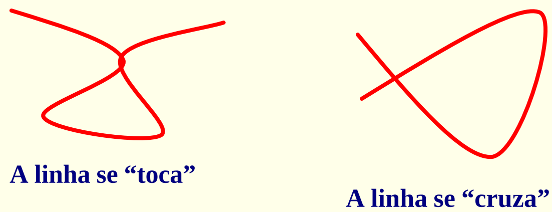


Figura 4.3

Outros exemplos de “*sona*” que podem ser utilizados no ensino das simetrias:

O *lusona* 1 da figura 4.4 representa uma leoa com seus dois filhotes, o 2 uma leoparda com seus cinco filhotes e as dimensões tanto da leoa quanto da leoparda e os respectivos filhotes foram escolhidas de modo que a mãe e o filhote sejam figuras semelhantes[38]. O esqueleto – figura sem as cabeças e caudas – da leoa com os filhotes tem dois eixos de simetria perpendiculares e o da leoparda com os filhotes, simetria rotacional de 180^o e, portanto, simetria em relação a um ponto. Os dois *sona* são monolineares. O *lusona* 3 é monolinear[39] e tem um eixo de simetria, o *lusona* 4 tem dois eixos de simetria perpendiculares e é formado por duas partes monolineares[40] – sem contar as linhas auxiliares – que possuem um eixo de simetria. O *lusona* 5 é monolinear[41], possui simetria rotacional de 90^o e não possui eixos de simetria.

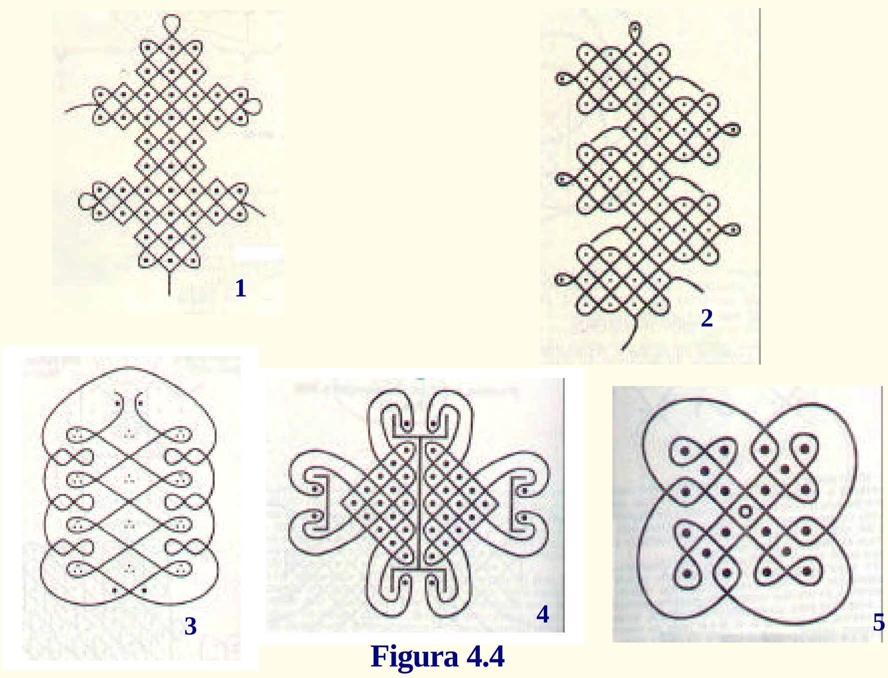
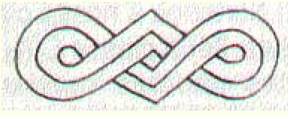


Figura 4.4

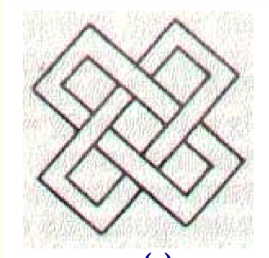
[38] Gerdes, P. [1993 v. 2] pp. 25 e 27
[39] Gerdes, P. [1993 v. 1] p. 88
[40] Gerdes, P. [1993 v. 1] p. 106
[41] Gerdes, P. [1993 v. 1] p. 31

- Os padrões de tatuagens de mulheres e ornamentos dos Bushongo[42] mostrado na figura 4.5 são simétricos em relação a um ponto.



(a)

(b)

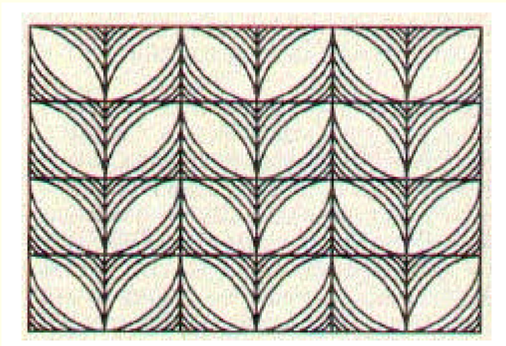


(c)

Figura 4.5

- Padrões geométricos usados nas paredes das casas no Lesotho[43] também podem ser utilizados no ensino das simetrias.

  - Na figura 4.6 o padrão tem dois eixos de reflexão perpendiculares e a composição pode ser feita através de sucessivas reflexões em relação a duas famílias perpendiculares de eixos paralelos.



Padrão

Figura 4.6

  - Na Figura 4.7 o padrão tem um eixo de reflexão; a composição pode ser feita através de sucessivas reflexões em relação a duas famílias perpendiculares de eixos paralelos. Podemos identificar, em partes da composição, modelos que possuem simetria rotacional com ângulo de rotação igual a 90^{o} e 4 eixos de reflexão.

---

[42] Gerdes, P. [1993 v. 1] pp. 48 e 49
[43] Gerdes, P. [1992] p. 13

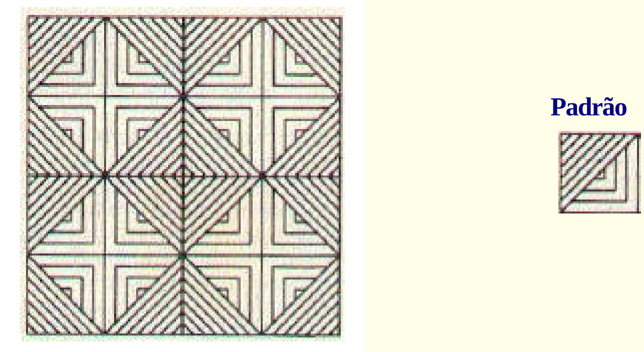


Figura 4.7

O padrão simétrico monolinear também é encontrado numa túnica guerreira dos Fulbe (Senegal) [Figura 4.8] e tem quatro eixos de simetria.

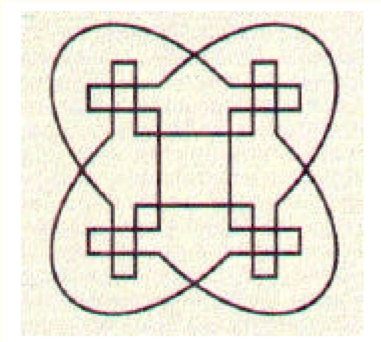


Figura 4.8

6.5. Índice de Figuras

6.6. Bibliografia

3 Sangos Disponível em: <**www.nigerbend.com/item.php3?key=255**> Acesso em: 10 jun. 2003.

AMUCHMA: REVISTA SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM ÁFRICA. No. 1 Maputo

CHILDE, V. G. Wheeled Vehicles In: SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R. **A History of Technology.** 1a. ed. Inglaterra: The Clarendon Press, 1958. p. 716-729.

Common Wodaabe Knife Disponível em: <**www.nigerbend.com/item.php3?key-28.**> Acesso em: 10 jun. 2003.

FORDE, D. Foraging Hunting, and Fishing In: SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R. **A History of Technology. From Early Times to Fall of Ancient Empires.** 1a. ed. Inglaterra: The Clarendon Press, 1958. p. 154-186.

GERDES, P. **Geometria Sona. Reflexões sobre uma tradição de desenho em povos da África do Sul** 1a. ed. Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1993. 170 p. v. 2.

GERDES, P. **Geometria Sona. Reflexões sobre uma tradição de desenho em povos da África ao sul do Equador** 1a. ed. Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1993. 201 p. v. 1.

GERDES, P. **Lunda Geometry: Designs, Polyominoes, Patterns, Symetries.** 1a. ed. Moçambique: Universidade Pedagógica, 1996. 152 p.

GERDES, P. Sobre a História da Matemática ao Sul do Sahara **Amuchma. Revista sobre a História da Matemática em África**, Maputo, v. 1, p. 5-36, 1992.

GERDES, P. **Sobre o Despertar do Pensamento Geométrico.** 1986. Tese de Doutorado - Instituto Superior Pedagógico "Karl Friedrich Wilhelm Wander" de Dresden (RDA).

GRUBER, J. G. A arte gráfica Ticuna In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 2a. ed. São Paulo: Nobel:EDUSP, 2000. p. 249-264.

GRUGNETTI, L.; ROGERS, L. Philosophical, Multicultural and interdisciplinary Issues In: FAUVEL, J.; van MAANEN, J. **History in Mathematics Education. The ICMI Study.** 1a. ed. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. 2. p. 39-61.

HARRISON, H. S. Fire-Making, Fuel, and Lighting In: SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R. **A History of Technology. From Early Times to Fall of Ancient Empires.** 1a. ed. Inglaterra: The Clarendon Press, 1958. p. 216-237.

HENDERSON, A.; GALEANO, G.; BERNAL, R **Field guide to the Palms of the americas** New Jersey: Princeton University Press, 1995. 332 p.

KOOGAN, A.; HOUAISS, A. **Enciclopédia e Dicionário Ilustrado** Rio de Janeiro: Edições Delta, 1996. 1635 p.

LANGDON, J. A Cultura Siona e a Experiência Alucinógena In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 1a. ed. São Paulo: Studio Nobel/EDUSP, 1992. p. 67-87.

LIMA, T. A. Cerâmica Indígena Brasileira. In: RIBEIRO, D. **SUMA Etnológica Brasileira 2. Tecnologia Indígena.** 2a. ed. Petrópolis: Vozes, 1987. 7. p. 173-229.

Mémoire de Rites. Les Populations d'Africa Centrales. Les Tshokwe Disponível em: <**http://www.civilization.ca/cultur/tervuren/terb07af.html** > Acesso em: 24 maio 2003.

MULLER, R. P. Tayngana, A Noção de Representação na Arte Gráfica Asurini do Xingu. In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 1a. ed. São Paulo: Studio Nobel/EDUSP, 1992. p. 231-248.

New large decorative comb, mounted Disponível em: <**www.nigerbend.com./catdir /catalog_4.php3**> Acesso em: 10 jun. 2003.

PROUS, A. Agricultores de Minas Gerais. In: TENÓRIO, M. C. **Pré-História da Terra Brasilis.** 1a. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2000. p. 345-358.

PROUS, A. As Primeiras Populações do Estado de Minas Gerais In: TENÓRIO, M. C. **Pré-História da Terra Brasilis.** 1a. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2000. p. 101-114.

RIBEIRO, D. Arte Indígena In: RIBEIRO, D. **SUMA-Etnológica Brasileira 3. Arte Indígena.** 2a. ed. Petrópolis: Vozes, 1987. 1. p. 29-64.

ROBERTS, J. M. **O Livro de Ouro da História do Mundo: Da Pré-História à Idade Contemporânea** . Tradução de L. Alves; A. REBELLO. 1a. ed. Rio de Janeiro: Ediouro, 2000. 816 p.

SCANDIUZZI, P. P. Apás Kayabi e Simetria **Zetetiké**, Campinas, v. 4, n. 6, p. 107-122, jul./dez. 1996.

SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R. (Ed.). **A History of Technology. Vol. 1. From Early Times to Fall of Ancient Empires.** Inglaterra: Oxford University Press, 1958. 827 p. v. 1.

SIQUEIRA JR., J. G. A Iconografia Kadiweu In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 1a. ed. São Paulo: Studio Nobel/EDUSP, 1992. p. 265-277.

SONNEMANN, R. **Geschichte der Technik** Alemanha: Edition Leipizig, 1978. 501 p.

STEWART, I. Simetria Quebrada In: STEWART, I **Os Números e a Natureza.** Rio de Janeiro: Rocco, 1996. p. 61-73.

TORAL, A. A. Pintura Corporal Karajá Contemporânea In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 1a. ed. São Paulo: Studio Nobel/EDUSP, 1992. p. 191-208.

van VELTHEM, L. H. Das Cobras e Lagartas: a Iconografia Wayana In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 1a. ed. São Paulo: Studio Nobel/EDUSP, 1992. p. 53-65.

VIDAL, L. A Pintura Corporal e a arte Gráfica entre os Kayapó-Xikrin do Cateté In: VIDAL, L. **Grafismo Indígena.** 1a. ed. São Paulo: Studio Nobel/EDUSP, 1992. p. 143-189.

WEYL, H. **Symmetry** USA: Princeton University Press, 1989. 168 p. (Prinveton Science Library.)

7. O Teorema de Pitágoras

7.1. Introdução

O Teorema de Pitágoras é considerado, por vários estudiosos, um dos Teoremas mais importantes e atraentes da história antiga da matemática. Vários resultados importantes em geometria teórica, bem como, na solução de problemas práticos relacionados à medidas foram descobertos através dele ou o utilizam e, certamente, ele é um dos mais famosos e úteis Teoremas da geometria elementar[1].

A associação deste tão conhecido Teorema relativo a triângulos retângulos com o nome do grego Pitágoras, de Samos, é universal[2] mas, embora a lenda atribua a ele sua descoberta e demonstração esta é uma questão em aberto. Evidências indicam que os antigos babilônicos o conheciam cerca de mil anos antes da época de Pitágoras.

De fato, até 1930 o Teorema de Pitágoras era considerado como sendo "de Pitágoras". Em 1928, Neugebauer publicou evidência mostrando que os antigos babilônios, de cerca de 1700 a.C. (ou melhor 1800-1600 a.C.) já conheciam o Teorema. Em 1930, Neugebauer vê-se ocupado decifrando antigos textos cuneiformes; e em 1937 conjectura que "o que era chamado pitagórico, na tradição grega, seria melhor chamado de babibônico"; então, em 1943, após a descoberta de um texto cuneiforme sobre "ternas Pitagóricas", considera sua conjectura validada.[3]

Evidências quanto a utilização do Teorema de Pitágoras também são encontradas nas civilizações egípcia, indiana, chinesa e as versões originais das obras indianas e chinesas onde o Teorema aparece, provavelmente datam do tempo de Pitágoras ou lhes são anteriores.[4]

O uso do Teorema de Pitágoras e de ternas pitagóricas nas sociedades egípcia, grega, babilônica, indiana, e chinesa é visto como evidência de uma possível origem comum para a matemática.[5]

Quando olhamos para a história do Teorema de Pitágoras nas diversas civilizações, encontramos dois aspectos distintos de sua aplicação: um geométrico e outro computacional.[6]

---

[1] Joseph, G. G. p. 180; Katz, V. p. 30
[2] Tian-se, A. p. 253
[3] Seidenberg, A. p. 101
[4] Gerdes, P. p. 5
[5] Swetz, J. p. 84
[6] Seidenberg, A. p.

Aspecto geométrico: vemos a hipotenusa de um triângulo retângulo (ou diagonal de um retângulo) gerando um quadrado cuja área é a soma das áreas do quadrado sobre os lados.

Aspecto computacional: dizemos que a diagonal é a raiz quadrada da soma dos quadrados dos lados. Este aspecto computacional é identificado no interesse de algumas civilizações pela construção de ternas de números reais (a, b, c) que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$.

> *O estudo do Teorema de Pitágoras no ensino fundamental e médio em geral se restringe ao aspecto computacional. Minha experiência no trabalho com a geometria em cursos de formação de professores mostra que são raros aqueles que percebem ou já trabalharam em sala de aula com o aspecto geométrico do Teorema. Em geral, quando pergunto sobre qual é o Teorema de Pitágoras, a resposta é dada pela equação $a^2 + b^2 = c^2$.*

De acordo com Seidenberg[7], a Grécia e a Índia conheciam ambos os aspectos e a Babilônia usava o aspecto computacional, mas não usava o geométrico. Veremos neste capítulo que encontramos o aspecto computacional na Babilônia e na antiga China e encontramos tanto o aspecto computacional quanto o geométrico nos *Sulbasutras* indianos.

Para melhor entender esses dois aspectos considere o problema:

> *Dados os lados **a** e **b** dos quadrados A e B. Achar o lado **c** de um quadrado C cuja área é aquela de A e B juntas.*

Na Grécia (nos Elementos) e na Índia (nos *Sulbasutras*) este problema seria resolvido através de uma construção geométrica, sem o uso da aritmética. Na antiga Babilônia **a** e **b** são vistos como números e a solução desejada é encontrada pela raiz quadrada de $\mathbf{a^2 + b^2}$. O conhecimento geométrico se restringe a saber o que é um quadrado e como calcular sua área a partir do lado; fora isso nenhuma geometria é utilizada e a solução é obtida através de um cálculo aritmético.

> *O fato do Teorema de Pitágoras ter sido descoberto e demonstrado por várias civilizações no decorrer da história, torna-o um excelente tema para discussão, em um curso de formação de professores, sobre a importância de uma abordagem multicultural no ensino da matemática.*

O conhecimento do Teorema pelos babilônios, indianos e chineses, sua importância para estas culturas e a importância de incorporar a discussão deste conhecimento em um curso de formação de professores serão tratados neste capítulo.

---

[7] Seidenberg, p.102

7.2. Na Antiga Babilônia

Tudo indica que, a mais antiga relação Pitagórica foi encontrada na tábula babilônica Plimpton 322 [Figura 2.1] datado de 1900 a 1600 a.C que contém uma tabela de ternas pitagóricas. Existem razões para acreditar que elas não foram encontradas empiricamente, mas calculadas através de regras ligadas ao conhecimento dos autores do Teorema de Pitágoras.

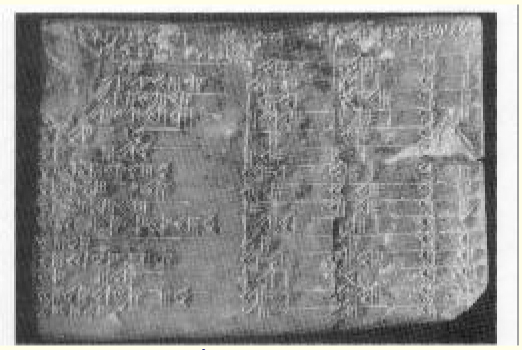


Figura 2.1

Esta descoberta foi feita por Neugebauer em conexão com seus estudos da matemática babilônica[8] e, em 1945, ele e Sachs publicaram suas interpretações desta tábula.[9]

A parte conhecida do texto cuneiforme consiste de uma tabela com quatro colunas e quinze linhas de números e cada coluna tem um título. Após uma série de estudos, concluiu-se que se tratava de uma tabela cujos elementos de cada coluna podem ser denotados, nesta ordem, por $\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}\right)^2$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{d}$ e $\mathbf{n}$ onde $\mathbf{x}$ – cujo título no texto original pode ser traduzido como "lado do quadrado" e $\mathbf{d}$ "diagonal do quadrado".[10]

É possível perceber que a extremidade superior esquerda da tábula está danificada – o que dificultou a interpretação da primeira coluna – e existe um grande pedaço faltando, mais ou menos no meio, do lado direito da tábula. Alguns acham que se trata, portanto, de uma parte de uma tábula maior.

A quarta coluna é simples de entender porque ela dá uma lista de números, em ordem crescente, de 1 a 15.

[8] Tian-Se, A. p. 255
[9] Joseph, G. G. p. 115
[10] Katz, V. p. 32

Neugebauer[11] observa que, em toda linha, o quadrado do número da terceira coluna menos o correspondente da segunda coluna é um quadrado perfeito.

Assim, se y^2 é este quadrado perfeito, então temos a relação $y^2 = d^2 - x^2$.

Ele conclui então, que a tabela é uma lista de ternas pitagóricas de números inteiros.

A primeira coluna é mais difícil de entender e para determinar seus elementos Neugebauer, após o cálculo de alguns dos valores de **y,** a partir dos valores correspondentes **x** e **d** da segunda e terceira colunas, percebe que os elementos da primeira coluna podem ser calculados aproximadamente, usando a fórmula $\dfrac{y^2}{d^2}$.

Assim, tudo indica que o conteúdo da tábula está relacionado com a construção de ternas pitagóricas de números racionais.

Joseph[12] considera que não é provável que os valores escritos na tábula tenham sido encontrados por tentativa e erro e levanta a seguinte questão:

Se os babilônios tinham um método mais sistemático para encontrar ternas pitagóricas, qual seria?

A resposta a esta questão é dada pelo próprio Joseph e resulta de uma análise da primeira coluna da tábula.

Sejam **x** e **d** os elementos da segunda e terceira colunas da tabela e $y^2 = d^2 - x^2$.

Então,

$$\left(\frac{d}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1$$

Ou seja,

$$\left(\frac{d}{y} + \frac{x}{y}\right)\left(\frac{d}{y} - \frac{x}{y}\right) = 1$$

Isto significa que existem inteiros **m** e **n** , m > n tais que

$$\frac{d}{y} + \frac{x}{y} = \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad \frac{d}{y} - \frac{x}{y} = \frac{n}{m}$$

[11] Neugebauer, O. p. 38
[12] Joseph, G. G. 116

Resolvendo as duas equações

$$\frac{d}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{m^2+n^2}{nm}\right) \quad e \quad \frac{x}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}-\frac{n}{m}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{m^2-n^2}{mn}\right)$$

Tem-se aqui um método para gerar ternas pitagóricas de números racionais, a partir de dois números inteiros positivos m e n com m > n.

A saber,

$$x=m^2-n^2;\ \ y=2mn;\ \ d=m^2+n^2$$

Isto sugere que os babilônios conheciam a relação Pitagórica em considerável generalidade mais de 1000 anos antes de Pitágoras.[13]

As relações acima também foram usadas por Diofanto[14].

Não se sabe ainda porque o escriba escolheu especificamente as ternas pitagóricas encontradas na tábula Plimpton 322, mas fica claro, para vários estudiosos, que ele estava familiarizado com a relação pitagórica e conhecia um método para gerar ternas pitagóricas.

Vejo na discussão do conteúdo da tábula Plimpton 322 a possibilidade dos alunos-professores exercitarem sua habilidade de identificar idéias matemáticas de outras épocas nos trabalhos matemáticos daquele momento.

Weil[15] afirma que "Para conhecer a matemática de um determinado período da história é importante ter um conhecimento que vai além do tópico mais aparente."

Assim, a busca do entendimento de um determinado assunto em um determinado momento histórico e em um grupo social propicia um ambiente onde a busca de conhecimentos novos e a utilização de conhecimentos já adquiridos se torna natural, e isso faz com que os alunos, auxiliados pelo professor, avancem no seu conhecimento matemático.

Para que o professor-aluno se prepare para propiciar esta caminhada a seus alunos é importante que ele vivencie esse processo durante sua formação.

Além da tabela encontrada no texto cuneiforme Plimpton 322, vários problemas encontrados em diversas tábulas da Antiga Babilônia, da mesma época, tornam explícito o uso do Teorema de Pitágoras e confirmam que este Teorema era bem conhecido pelos matemáticos da época e que eles o utilizavam na solução de problemas geométricos. Isto não

[13] Tian-Se, A. p. 255
[14] van der Waerden, B. L. p. 15
[15] Weil, H. p. 24

significa que encontramos na Antiga Babilônia o aspecto geométrico do Teorema de Pitágoras. Para resolver estes problemas, os babilônios utilizavam o aspecto computacional.

Considero importante a discussão desses problemas em um curso de formação de professores com o objetivo de tornar o futuro professor familiarizado com diversos métodos para resolver problemas, discutir métodos algébricos para resolução de problemas geométricos e uma conexão entre soluções de equações e sistemas de equações lineares e quadráticas e a geometria. É interessante discutir também a "forma" pedagógica com que a solução é apresentada.

Segundo Swetz[16]*, os professores estão sempre à procura de problemas cujas soluções exijam a aplicação de certos conceitos matemáticos e técnicas cujo conteúdo demanda uma certa quantidade de interpretação e cuja apresentação pode estimular o interesse dos alunos. Os problemas realmente bons são aqueles que possuem todas essas qualidades e, além disso, dão origem a outros problemas: são um incentivo para explorações matemáticas e discussões em sala de aula. Incursões históricas baseadas em problemas criados por nossos antepassados enriquecem o trabalho em sala de aula.*

Uma tradução de uma tábula babilônica que está preservado no museu britânico é mais uma evidência de que os babilônios estavam familiarizados:

4 é o comprimento e 5 a diagonal. Qual é a largura? Seu tamanho não é conhecido. 4 vezes 4 é 16. 5 vezes 5 é 25. Você tira 16 de 25 e resta 9. O que eu devo considerar vezes [ele mesmo] para obter 9? 3 vezes 3 é 9, então, 3 é a largura.

Uma análise deste texto indica que, para determinar a largura **b** de um retângulo de comprimento **a** e diagonal **d**, o escriba procede do seguinte modo:

- Calcular a^2;
- Calcular d^2;
- Calcular a diferença $d^2 - a^2$;
- Encontrar um número **b** tal que $b^2 = d^2 - a^2$;
- Esse número **b** é a largura;

Isto significa que os números **a**, **b** e **d** estão relacionados pela equação $d^2 = b^2 + a^2$ que é a relação pitagórica.

---

[16] Swetz, J. p. 201

Um outro exemplo onde é evidente o uso deste Teorema pelos babilônios é encontrado na tábula Tell Dhibayi da antiga Babilônia.

Neste texto, que é acompanhado de um desenho geométrico simples, encontramos o problema[17]:

Calcular os lados de um retângulo, dado o comprimento da diagonal c = 1;15 e a área A = 0;45.

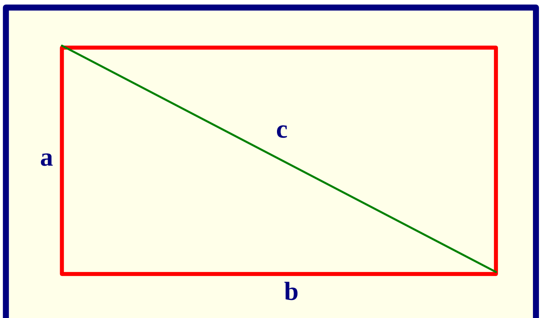


Figura 2.2

Sejam **a** e **b** os lados do retângulo e **c** o comprimento de sua diagonal. A solução encontrada na tabula e sua verificação podem ser descritas na linguagem atual do seguinte modo:

1. Multiplicar a área por 2. Resultado 1;30

$$2A\,;$$

2. Elevar ao quadrado a diagonal. Resultado: 1;33,45

$$c^2;$$

3. Subtrair do primeiro o segundo. Resultado: 0;3,45

$$c^2 – 2A = (a - b)2;$$

Pelo Teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Assim,

$$c^2 - 2A = a^2 + b^2 –2ab = (a - b)^2$$

4. Extrair a raiz quadrada. Resultado: 0;15

[17] Friberg, J. *et al* p. 306; O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. p. 4; Joseph, G. G. p. 120

$$a-b=\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{c^2-2A};$$

5. Dividir o resultado anterior por 2. Resultado: 0;7,30

$$\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}\sqrt{c^2-2A};$$

6. Achar a quarta parte do valor encontrado no item 3. Resultado: 0;0,56,15

$$\frac{1}{4}(a-b)^2=\left(\frac{1}{2}(a-b)\right)^2=\frac{1}{4}\left(c^2-2A\right);$$

7. Somar a área. Resultado: 0;45,56,15

$$ab+\left(\frac{1}{2}(a-b)\right)^2=\left(\frac{1}{4}(a+b)\right)^2=\frac{1}{4}(c^2+2A);$$

8. Achar a raiz quadrada. Resultado: 0;52,30

$$\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+2A};$$

9. Somar os valores encontrados nos itens 5 e 8. Este é o comprimento a. Resultado: 1

$$a=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{c^2-2A}+\sqrt{c^2+2A}\right]$$

10. Subtrair do valor encontrado em 8 o encontrado em 5. Esta é a largura **b**. Resultado: 0;45

$$b=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{c^2+2A}-\sqrt{c^2-2A}\right]$$

Portanto, o retângulo procurado tem lados 1 e 0;45 e a terna (1, 0;45, 1;15) é pitagórica.

De acordo com Joseph,

> Este exemplo resume a versatilidade da matemática babilônica. Ali existiu um grupo de pessoas que pela primeira vez combinaram a aritmética, a álgebra e a geometria, para resolver problemas.[18]

É importante em um curso de formação de professores que o professor-aluno tenha a oportunidade de refletir sobre o fato de que a matemática não é uma ciência formada de áreas disjuntas [álgebra, aritmética, geometria, análise] mas que, métodos desenvolvidos em um

[18] Joseph, G. G. p. 120.

campo, podem ser úteis e devem ser utilizados para resolver problemas de outro campo, e que o aluno tem o direito de escolher o método com o qual se sinta mais à vontade para trabalhar.

Outro exemplo importante de ser mencionado é o encontrado na tábula YBC 7289 discutido no capítulo “O quadrado e o Círculo”. Ele contém o desenho de um quadrado de lado 30, com as diagonais desenhadas e perto do centro estão escritos os números 1,24,51,10 e 42,25,35. A análise mostra o uso do Teorema de Pitágoras para calcular a diagonal de um quadrado. De acordo com Neugebauer, este exemplo é prova suficiente de que o Teorema de Pitágoras era conhecido mais de 1000 anos antes de Pitágoras.[19] Além disso, este problema mostra que os matemáticos da Antiga Babilônia também trabalhavam com aplicações do Teorema de Pitágoras no caso de triângulos não racionais, i. e. quando as soluções do problema envolviam cálculos aproximados de raízes quadradas. Porém, de acordo com Fribeg[20], como regra geral eles preferiam tratar com triângulos retângulos de lados racionais.

Assim, para Fribeg não é de se estranhar que os matemáticos babilônios estivessem familiarizados com certos tipos de problema[21] habilmente criados (interessados com relações entre os lados de um triângulo retângulo) que conduzissem à resolução de equações lineares ao invés de quadráticas, e, portanto, sempre solúveis em termos de números racionais para valores racionais arbitrariamente dados.

Um outro problema interessante foi encontrado na Tábula Susa – ver capítulo 3. No problema são dadas as medidas dos lados [50 e 50] e a base [60] de um triângulo isósceles e pede-se para encontrar o raio do círculo que passa pelos três vértices do triângulo, i.e., o raio do círculo circunscrito[22].

O diagrama encontrado na tábula é semelhante ao da figura 2.3.

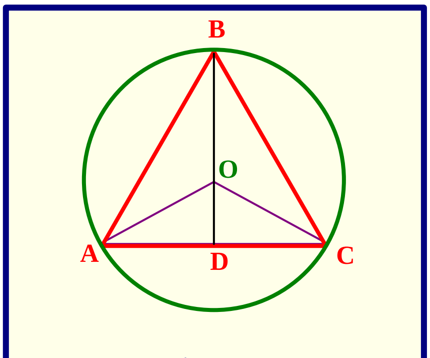


Figura 2.3

[19] Neugebauer, O. p. 36
[20] Fribeg, J. *et al* p. 306
[21] Problemas análogos também aparecem na história da matemática chinesa.
[22] O’Connor, J. J.; Robertson, E. F. p. 3; Katz, V. p. 32; Bunt, L. N. H. *et al* p. 59

Se a = AB e b = AC são as medidas dos lados e da base do triângulo, h = AD é a altura e AO = r é o raio do círculo circunscrito, o problema pode ser resolvido como segue:

- Pelo Teorema de Pitágoras,

$$AD^2 + BD^2 = AB^2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + BD^2 = AB^2 \rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$

- Por outro lado AO = OC = r [raio do círculo]
- Aplicando mais uma vez o Teorema de Pitágoras ao triângulo AOD temos:

$$AO^2 = AD^2 + OD^2 \rightarrow AO^2 = \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + (BD - OD)^2 \rightarrow r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (h - r)^2$$

- Temos então um sistema de equações do segundo grau a uma incógnita

$$\begin{cases} \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \\ r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (h - r)^2 \end{cases}$$

- Da primeira equação concluímos que

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

- Substituindo o valor de $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ da primeira equação na segunda temos:

$$r^2 = a^2 - h^2 + h^2 - 2hr + r^2 \rightarrow 2hr = a^2 \rightarrow r = \frac{a^2}{2h}$$

- Cuja solução foi encontrada resolvendo apenas uma equação linear.
- Para a = 50 e b = 30 [dados do problema] encontramos

$$h = \sqrt{(50)^2 - (30)^2} = 40 \ \text{ e } \ r = \frac{2500}{80} = 31{,}25$$

- No sistema de numeração sexagesimal temos que o círculo circunscrito tem raio r = 3;15.

Além do conhecimento do Teorema de Pitágoras, este exemplo mostra que os babilônios estavam familiarizados com o fato de que, em um triângulo isósceles, a reta que liga o vértice ao ponto médio da base é perpendicular à base (i.e.), e em um triângulo isósceles, a altura e a mediana relativas à base coincidem.

Este problema, de acordo com Bunt[23], também mostra que a matemática babilônica não estava exclusivamente focalizada em aplicações. Este problema não é um problema prático.

7.2.1. A descoberta do Teorema de Pitágoras

Embora alguns estudiosos afirmem que nunca será encontrada uma resposta definitiva para a questão de como os antigos matemáticos babilônios originalmente descobriram o Teorema de Pitágoras e seus métodos de construir ternas pitagóricas, vale a pena tentar identificar, pelo menos, algum modo no qual o Teorema de Pitágoras possa ter sido descoberto.

Friberg[24] afirma que, provavelmente, o Teorema de Pitágoras foi encontrado por acidente pelos babilônios no decorrer de alguma investigação geométrica independente. Isto significa, segundo ele, que não devemos procurar uma prova do Teorema de Pitágoras, mas um problema geométrico cuja solução tenha o Teorema como um corolário.

Apresento a seguir o processo que levou Friberg a identificar os possíveis tipos de problemas geométricos que poderiam ter levado os babilônios até o Teorema de Pitágoras.

O problema encontrado no texto IM 55357 de Tell Harmall pode ser formulado do seguinte modo[25]:

Dados os lados do triângulo ABC e as áreas dos triângulos BAD, ADE, DEF e EFC, como mostra a figura, calcule os comprimentos BD, DF, AE e AD.

Neste problema o triângulo ABC de lados (1, 45, 1 15) é dividido em uma série de outros triângulos por meios de segmentos alternadamente perpendiculares à diagonal e lado do triângulo dado [Figura 2.4] e área (BAD) = 8,6, área (ADE) = 5,11;2,24, área (DEF) = 3,19;3,56,36 e área (CEF) = 5,53;53,39,50,20 são conhecidas.

[23] Bunt, L. *et al* p. 62
[24] Friberg, J. p. 314
[25] Joseph, G. G. p. 123

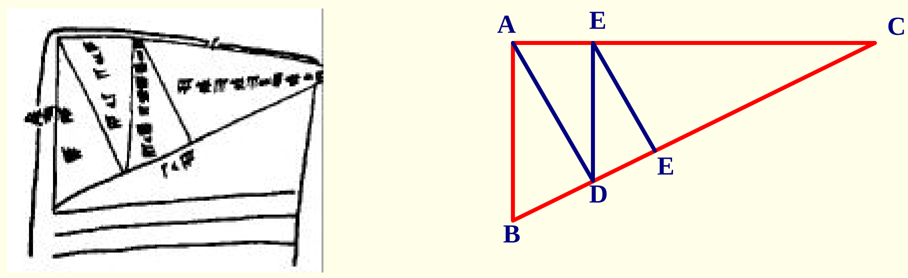


Figura 2.4

As três primeiras etapas do algoritmo usado para resolver este problema podem ser descritas da seguinte forma[26]:

- Calcular $\dfrac{1}{AC}$
- Calcular $\dfrac{1}{AC} \times AB = \dfrac{AB}{AC}$
- $2\dfrac{AB}{AC}(\text{área ABD}) = BD^2$

Analisando estas etapas que permitem calcular o lado BD do triângulo ADB, percebemos que os babilônios deviam conhecer os seguintes resultados:

- Se o triângulo ABC é semelhante ao triângulo ABD, então $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{AD}$;
- A área do triângulo ABD = $\dfrac{1}{2}(BD \times AD)$

Usando esses dois resultados temos:

$$2\frac{AB}{AC}(\text{área ABD}) = \frac{AB}{AC} \times BD \times AD = \frac{BD}{AD} \times BD \times AD = (BD)^2$$

e BD fica assim determinado.

De modo análogo os demais lados dos triângulos que aparecem na figura ficam determinados. A saber,

$$2\frac{AC}{AB}(\text{área ABD}) = (AD)^2$$

[26] Joseph, G. G. p. 123; Fiberg, J. p. 311

Para determinar os lados AE e ED do triângulo ADE basta considerar a semelhança dos triângulos ADC e ADE onde DC = BC – BD, e para determinar os lados DF e EF, a semelhança dos triângulos DEC e DEF e os resultados EC = AC- AE e FC = BC – (BD + DF).

Observe que a solução deste problema não utiliza o Teorema de Pitágoras.

Voltando agora à primeira parte da solução deste problema e chamando de **a**, **b** e **c** os lados do triângulo ABC e **u** e **v** as projeções ortogonais de AB e BC sobre a hipotenusa AC do triângulo, [Figura 2.5] temos:

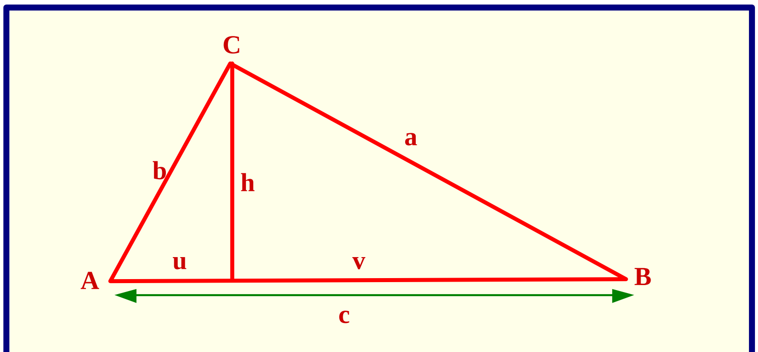


Figura 2.5

Do resultado sobre semelhança utilizado no problema anterior temos:

- $\frac{b}{a} = \frac{u}{h}$ e $\frac{b}{a} = \frac{h}{v}$;
- $c = u + v$;

Podemos calcular a área do triângulo ABC de duas formas diferentes:

$$2\text{área}(ABC) = ab = hc$$

Assim,

$$2(\text{área } ABC) = hc \rightarrow \frac{b}{a}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)v^2$$

$$2(\text{área } ABC) = ab = \frac{a^2 b}{a}$$

Igualando as duas equações,

$$a^2\frac{b}{a} = \frac{b}{a}\left[1 + \frac{b^2}{a^2}\right]v^2 \rightarrow a^2 = v^2 + \frac{b^2}{a^2}v^2 = v^2 + h^2$$

Logo,

$$a^2 = v^2 + h^2$$

que é a fórmula do Teorema de Pitágoras aplicada ao triângulo de lados **a**, **v** e **h**.

Frieberg[27] sugere, a partir de um raciocínio análogo ao que acabo de apresentar, que os babilônios podem ter descoberto o Teorema de Pitágoras como conseqüência do processo utilizado por eles para resolver problemas semelhantes ao encontrado no texto IM 55357 de Tell Harmal.

Considero que o estudo do Teorema de Pitágoras, em um curso de formação de professores, deveria se iniciar com uma análise crítica das evidências e considerações feitas por historiadores da matemática com relação aos modos como este Teorema foi incorporado ao conhecimento matemático daquela civilização. A discussão dos problemas aqui apresentados e as opiniões dos historiadores de como este Teorema pode ter sido descoberto levariam a uma discussão bastante interessante sobre vários temas da geometria elementar, sobre técnicas de resolver problemas e seria um ótimo exercício para o professor em formação que a todo momento terá que entender e analisar os modos como seus alunos resolvem os problemas que lhes são propostos.

7.3. Na antiga civilização indiana

No capítulo 2 deste trabalho vimos que os conteúdos geométricos do *Subasutras* podiam ser colocados em três categorias, sendo uma delas a dos Teoremas explicitamente colocados. O Teorema de Pitágoras pertence a esta categoria e está relacionado a quadrados sobre a diagonal e lados de um retângulo. G Thibaut mostra, em 1875, que os sacerdotes indianos conheciam este Teorema.

7.3.1. O Teorema

É altamente provável que o Teorema de Pitágoras fosse conhecido na Índia muito antes do período dos *Sulbasutra*s. Seu enunciado em termos de lados e diagonais de quadrados e retângulos é encontrado nos *Sulbasutra*s de Baudhayana e Apastamba e o fato do teorema ser enunciado em duas partes – primeiro para quadrados e depois para retângulos quaisquer – talvez indique duas etapas na sua descoberta.

A versão de Baudhayana[28] (1, 45)diz:

[27] Friberg, J. p. 312

[28] O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. p. 2; Joseph, G. G. p. 229

A corda que se estica no sentido da diagonal de um quadrado produz uma área de tamanho ao dobro do quadrado original. [Figura 3.1]

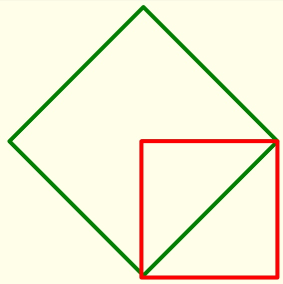
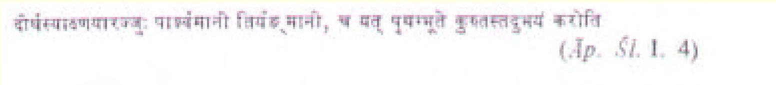


Figura 3.1

Katyayana, no entanto, apresenta uma proposição mais geral [Figura 3.2] que pode ser escrita do seguinte modo:



दीर्घस्याक्ष्णयारज्जुः पार्श्वमानी तिर्यङ्मानी, च यत् पृथग्भूते कुरुतस्तदुभयं करोति

(*Āp. Śl.* I. 4)

Figura 3.2

A corda esticada ao longo do comprimento da diagonal de um retângulo produz ambos uma área igual à obtida conjuntamente pelos lados horizontal e vertical. [Figura 3.3]

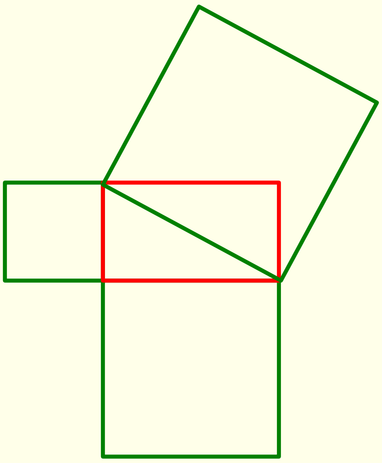


Figura 3.3

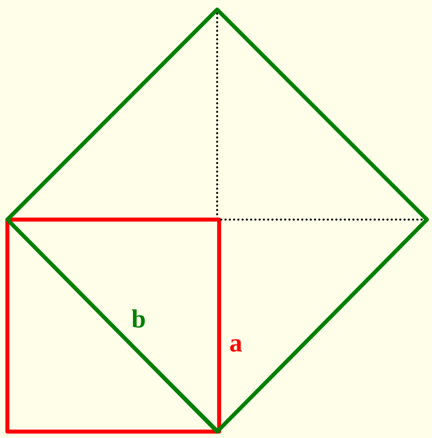
Observe que, para os indianos, o Teorema de Pitágoras não é um Teorema sobre triângulos e sim um Teorema sobre retângulos.

De acordo com Amma[29], o enunciado deste teorema em sua forma mais geral talvez seja a contribuição mais importante da Antiga Índia para o desenvolvimento da matemática. Para ele, o significado geométrico do Teorema de Pitágoras talvez tenha acontecido primeiro entre sacerdotes védicos na construção de altares.

7.3.2. A descoberta do Teorema

Existem algumas explicações de como o Teorema de Pitágoras pode ter sido descoberto pelos indianos:

- Pela observação de que o quadrado sobre a diagonal de um quadrado pode ser dividido em quatro triângulos, cada um deles de área igual à metade da área do primeiro quadrado. [Figura 3.4]



$$b^2 = 4\frac{a^2}{2} = 2a^2$$

Figura 3.4

- Na construção do *atman* que é um quadrado de 4 *purushas* de áreas e é feito unindo 4 quadrados de uma *purusha*. [Figura 3.5]. Se traçarmos as diagonais dos quadrados menores como na figura 3.5, formamos um quadrado que está dividido em quatro triângulos de área meia *purusha*. Assim, o Teorema pode ter sido descoberto pela observação de que o quadrado sobre a diagonal de um quadrado tem área igual ao dobro da área desse quadrado.

---

[29] Amma, S. T. A. p. 16

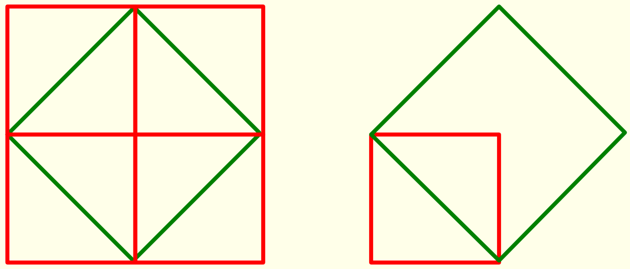


Figura 3.5

- O *paitrky vedi* é feito construindo um quadrado de duas *purushas* com estacas (as quinas do Vedi) no ponto médio dos lados. O diagrama da construção é o mesmo da Figura 3.5 e o Teorema seria descoberto a partir da construção deste altar.

Para Amma e Katz, estes são os modos mais razoáveis de ter acontecido a descoberta do Teorema[30] .

Identificar as possíveis condições que deram origem ao desenvolvimento histórico de um assunto pode servir de ponto de partida para discutir-se condições que propiciem a aprendizagem ou a introdução desse assunto nas aulas de matemática. É importante que o professor em formação esteja sempre ampliando o conjunto das possíveis formas de trabalhar um conteúdo matemático com seus alunos.

Quanto à descoberta do Teorema no caso geral, Thibaut *apud* Amma aceita a explicação de que os matemáticos antigos podem ter descoberto a terna pitagórica 3, 4, e 5 observando através da construção de figuras utilizando seixos que 9 e 16 são quadrados e que os dois somados dá 25 que também é um quadrado.

Com relação à descoberta pelos indianos Thibaut, de acordo com Amma, considera que eles devem ter desenhado quadrados sobre os lados e diagonais de um retângulo dividindo-os em unidades quadradas e encontrando a relação pela contagem das unidades. Bürk e Datta, também de acordo com Amma, sugerem que a descoberta do caso geral está relacionada ao problema de aumentar a área de um quadrado, problema este que aparece em várias construções de altares da época védica.

Em um destes altares são utilizados 225 + 64 = 289 tijolos que são arrumados para formar um quadrado do seguinte modo:

- Um quadrado é construído com 256 tijolos.

---

[30] Amma, S. T. A. p. 20; Katz, V. p.34.

- Os 33 tijolos restantes são colocados em torno do quadrado construído.

Para Amma[31], qualquer que tenha sido a necessidade desta orientação estranha, já que os 289 tijolos podem ser arrumados em fileiras de 17 tijolos para formar o quadrado, isto deixa clara a familiaridade dos indianos da época com a idéia de aumentar um quadrado acrescentando a ele um *gnomon*.

As descobertas de ternas pitagóricas através da ampliação de quadrados pelo acréscimo de *gnomons* seria natural.

7.3.3. As ternas pitagóricas

Vimos que os indianos védicos estavam familiarizados com ternas pitagóricas, isto é, números satisfazendo a relação $a^2 + b^2 = c^2$.

É interessante observar que desde antes de 1943 já se tinha conhecimento de que os *Sulbasutra*s continham ternas pitagóricas. Além disso, algumas das ternas lá encontradas, por exemplo a (8,15,17) satisfazem a propriedade básica das ternas pitagóricas mas não estão entre aquelas relacionadas aos pitagóricos – as últimas têm a propriedade de que, após todos os fatores comuns terem sido removidos, a diferença entre os dois maiores números é igual a 1.[32]

Devido ao uso freqüente do Teorema de Pitágoras, encontramos nos *Sulbasutras* muitos exemplos de ternas pitagóricas[33]:

- No Apastama *Sulbasutra* encontramos as ternas pitagóricas (15, 36, 39) e (3, 4, 5), (5, 12, 13), (12, 15, 37);
- No Baudahayana *Sulbasutra* a terna (7, 24, 25);
- No Mãnava *Sulbasutra* (72, 96, 120), (40, 96, 104).

Além de ternas formadas por números inteiros, eles também se utilizavam de algumas que continham números fracionários, como por exemplo $(2\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2})$, $(7\frac{1}{2}, 10, 12\frac{1}{2})$ encontradas no Mãnava *Sulbasutra*.

Ternas de números irracionais como $(1, 1, \sqrt{2})$, $(5\sqrt{3}, 12\sqrt{3}, 13\sqrt{3})$, $(15\sqrt{2}, 36\sqrt{2}, 39\sqrt{2})$ também eram utilizadas para construir triângulos retângulos. Esses números

[31] Amma, S. T. A. p. 21
[32] Seidenberg, A. p. 489
[33] O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. p. 2

provavelmente surgiram das exigências rituais necessárias à construção de altares, cujas áreas eram múltiplos inteiros ou frações de outros altares com a mesma forma. Por exemplo, as dimensões de um altar *soutramani* (altar com uma base triangular de lados ($5\sqrt{3}$, $12\sqrt{3}$ e $13\sqrt{3}$)) se chegava partindo de um triângulo com dimensões (5, 12 e 13), sendo a unidade de medida a *purusha* (quase 2,5 m, ou a altura de um homem com seus braços esticados para cima).

Existem boas razões para acreditar-se que os autores dos *Sulbasutra*s estavam familiarizados com mais de um método que permitisse gerar ternas pitagóricas.[34] As fórmulas

- $2n^2+2n,\ 2n+1,\ 2n^2+2n+1$ fornecem triângulos cuja hipotenusa excede o lado menor em uma unidade.
- O método do Katyayana para construir um quadrado igual em área à soma das áreas de qualquer número de quadrados de lados iguais a **a** – apresentado no capítulo 3 – fornece a relação

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 a^2 + na^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 a^2$$

que permite gerar ternas Pitágoras do tipo

$$\left(\frac{n-1}{2}a,\ \sqrt{n}a,\ \frac{n+1}{2}a\right)$$

e ternas pitagóricas de números racionais

$$\left(\frac{m^2-1}{2}a,\ ma,\ \frac{m^2+1}{2}a\right)$$

para **m** um numero inteiro e **a** um número racional, o que permite construir triângulos retângulos ou retângulos cuja diferença entre o lado maior e a diagonal é igual a **a**.

[34] Friberg, J. p. 309

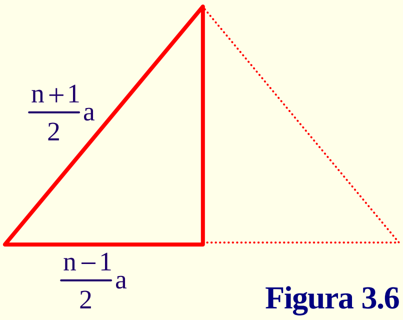


Figura 3.6

Quando a = 1 temos as ternas $\left(\frac{n-1}{2},\ \sqrt{n},\ \frac{n+1}{2}\right)$ e obtemos as ternas de números racionais $\left(\frac{m^2-1}{2},\ m,\ \frac{m^2+1}{2}\right)$ cuja diferença entre a hipotenusa e o lado maior é 1.

Para a = 2, temos $\left(n-1, \sqrt{4n}, n+1\right)$ e $\left(m^2-1,\ 2m,\ m^2+1\right)$ permitindo construir um retângulo onde a diferença entre o lado maior e a diagonal é 2.

7.3.4. As Aplicações

Encontramos nos *Sulbasutras* quinze construções que utilizam o Teorema de Pitágoras. Entre elas a duplicação de quadrados, construção de quadrados de área igual à soma de dois quadrados dados, construção de ângulos retos. Algumas já foram discutidas nos capítulos anteriores deste trabalho e outras serão discutidas a seguir.

Um método para construir ângulos retos que usa o Teorema de Pitágoras é apresentado da seguinte forma:

As extremidades de uma corda de oito unidades de comprimento são atadas a duas estacas fincadas na terra nos pontos **A** e **B** separadas por quatro unidades [Figura 3.7]. Uma outra marca é feita em um terceiro ponto, a 3 unidades de uma das extremidades da corda, digamos o ponto **B**. A corda é levantada neste ponto e esticada até que a marca toque a terra em **C**, depois do que o ângulo reto **ABC** é produzido.[35]

---

[35] Seidenberg, A. p. 490

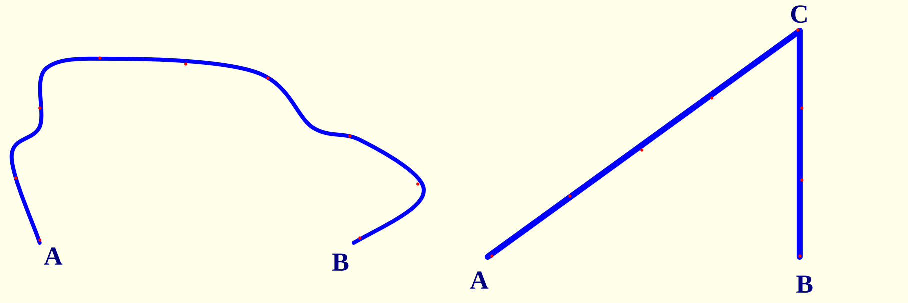


Figura 3.7

O fato do ângulo ABC ser reto em B é uma conseqüência imediata da recíproca do Teorema de Pitágoras e poderia ser um momento adequado para demonstrar e discutir esse Teorema.

Recíproca do Teorema de Pitágoras:

Se em um triângulo ABC, temos $AB^2 + BC^2 = AC^2$ *então, o triângulo ABC é retângulo em B.*

Métodos para construir ângulos retos, sem utilizar o Teorema de Pitágoras, também são descritos nos *Sulbasutra*s como vimos alguns exemplos no capítulo 2 deste texto.

Os *Sulbasutra*s exibem uma completa familiaridade com as propriedades de triângulos retângulos.

O *sutra* seguinte àquele que enuncia o Teorema de Pitágoras no Baudayana *Sulbasutra* pede para:

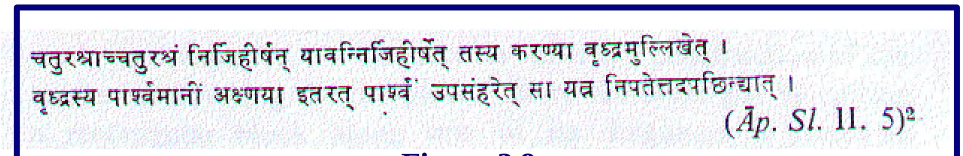
Construir um retângulo com o lado do quadrado como largura e a diagonal como comprimento.

Então,

a diagonal daquele retângulo é o lado de um quadrado cuja área é três vezes a área do quadrado.

Esse resultado é uma conseqüência imediata do Teorema de Pitágoras e nos faz lembrar a construção geométrica, que encontramos em alguns textos de geometria, da $\sqrt{n}$ *com n inteiro positivo.*

Um outro problema de construção, encontrado no Apastamba *Sulbasutra*, [Figura 3.8] pede para:



चतुरश्राच्चतुरश्रं निर्जिहीर्षन् यावन्निर्जिहीर्षेत् तस्य करण्या वृध्रमुल्लिखेत् ।
वृध्रस्य पार्श्वमानीं अक्ष्णया इतरत् पार्श्वं उपसंहरेत् सा यत्र निपतेत्तदपछिन्द्यात् ।
($\bar{A}$p. Sl. II. 5)²

Figura 3.8

Construir um quadrado igual à diferença de dois quadrados dados.

O método[36] de construção pode ser descrito como segue:

- Sejam ABCD e PQRS os quadrados de lados a e b com a > b;
- Marcar um ponto **K** sobre AB tal que AK = b [Figura 3.9]

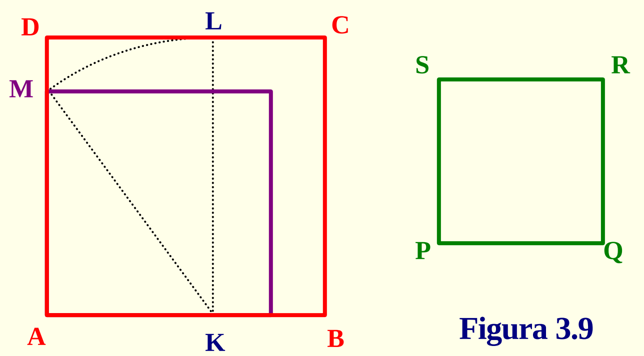


Figura 3.9

- Construir uma perpendicular a AB passando por K;
- Esta perpendicular intercepta o lado DC em K;
- O círculo de centro K e raio KL intercepta AD em M;
- O quadrado de lado AM tem área igual à diferença entre as áreas dos quadrados de lados **a** e **b**.

De fato,

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$AM^2 + AK^2 = KM^2 \rightarrow AM^2 = KL^2 - AK^2 \rightarrow AM^2 = a^2 - b^2$$

Mas AM^2 é a área do quadrado de lado AM e, sendo assim, o quadrado de lado AM tem área igual à diferença das áreas dos quadrados de lados **a** e **b**.

De acordo com Amma[37] a explicação $AM^2 = KM^2 - AK^2$ é dada pelo próprio Apastamba no próximo *sutra*.

[36] Katz, V. p. 42; Amma, S. T. A. p. 45
[37] Amma, S. T. A. p.46

O Teorema de Pitágoras também é aplicado na construção:

- de um quadrado, igual em área, a dois quadrados desiguais;
- de um quadrado de área igual a de um retângulo dado.
- de um quadrado cuja área é n vezes a área de um quadrado dado;
- da soma e diferença de dois quadrados ;
- do altar *smasana* que é um trapézio isósceles.

De acordo com Jones[38]*, pesquisas em ciência cognitiva tornam claro que pessoas com conhecimentos específicos têm modos mais elaborados de armazenar e receber informações; que a armazenagem e recuperação de informações envolvem fazer mais e mais conexões entre os conhecimentos novos, a informação e os conhecimentos já adquiridos, e que a escolha de caminhos que levam à aquisição de um novo conhecimento depende de experiências anteriores.*

Acredito que colocar os professores-alunos em contato com diferentes ambientes sociais em que um determinado conhecimento geométrico foi utilizado e com diferentes formas de aplicá-lo, seria a oportunidade de atrair sua atenção para o paralelo entre história e o processo ensino-aprendizagem descrito por Jones. Essa discussão pode vir a contribuir para a tomada de consciência da importância de reconhecer os contextos individuais nos quais os estudantes operam e, portanto, da individualidade do processo de aprendizagem, e de que métodos pedagógicos que não levam em conta esses processos individuais podem inibir a aprendizagem dos alunos.

7.4. Na antiga civilização chinesa

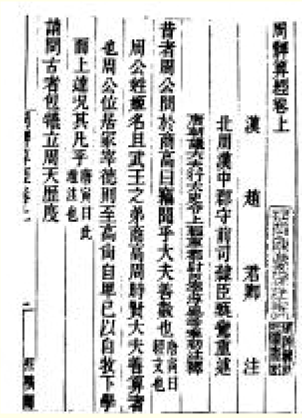
Na China o estudo de triângulos retângulos teve um impacto considerável sobre a matemática. O uso de triângulos retângulos e de sua teoria estavam na base da antiga astronomia e agrimensura e estas duas ciências eram essenciais para o funcionamento do Império Chinês.

De acordo com Horng[39], o Teorema de Pitágoras na China estava relacionado ao problema de determinar o terceiro lado de um triângulo retângulo conhecendo os outros dois lados. Este problema é conhecido na China como problema *Gou gu*[40] e é por isto que o Teorema de Pitágoras também é conhecido como Teorema *Gou gu*.

[38] Jones, C. V.p. 6
[39] Horng, W. S. p. 259
[40] As palavras *gou* e *gu* significam literalmente o menor e o maior cateto de um triângulo retângulo. Horng, W. S. p. 259

7.4.1. O Teorema

Na China, a relação Pitagórica foi registrada no *Chou-pi suan-ching* [Figura 4.1]. O livro tem uma discussão sobre a relação Pitagórica e termina com a afirmação de que o conhecimento de tal Teorema foi de uma forma geral aplicado por Yü, o padroeiro dos engenheiros hidráulicos, em seu trabalho sobre controle de água, irrigação e conservação.[41]


周髀算經卷上
漢 趙 君卿 注
北周漢中郡守前司隸臣甄鸞重述
昔者周公問於商高曰竊聞乎大夫善數也
周公姓姬名旦武王之弟商高周時賢大夫善算者
也周公位居冢宰德則至聖尚自卑己以自牧下學
而上達況其凡乎
請問古者包犧立周天歷度

Primeira página do *Chou-pi*

Figura 4.1

O capítulo IX do *Jiuzhang suanshu*, intitulado *Gou Gu*, é sobre triângulos retângulos e contém inicialmente 16 problemas que podem ser resolvidos por meio do Teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos retângulos. Liu Hui, em sua revisão do *Jiuzhang suanshu*, estendeu esta coleção incluindo nove problemas envolvendo problemas complexos da agrimensura.[42] Por causa de sua utilidade e importância, estes nove problemas foram compilados em um trabalho separado, *Haido suanjing* [manual matemático ilhas marítimas] que é considerado hoje um trabalho clássico sobre a teoria dos triângulos retângulos.[43]

Mikami[44] apresenta três enunciados do Teorema de Pitágoras encontrados no *Jiuzhnag suanshu*. A saber,

> *Eleve ao quadrado o primeiro lado e o segundo e some; então a raiz quadrada [da soma] é a hipotenusa.*
>
> *Quando o quadrado do segundo lado é subtraído do quadrado da hipotenusa, a raiz quadrada da diferença é o primeiro lado.*

---

[41] Tian-Se, A. p. 255
[42] Seiendeberg, A. p. 108; Mikami, Y. p. 21
[43] Swetz, F. J. p. 85
[44] Mikami, Y. p. 21

Quando o quadrado do primeiro lado é subtraído do quadrado da hipotenusa, a raiz quadrada da diferença é o segundo lado.

7.4.2. As Demonstrações

De acordo com Tian-Se[45], Morris Cantor sugere que a prova mais antiga do Teorema de Pitágoras foi derivada da figura na qual os quatro triângulos inferiores juntos são iguais aos quatro superiores [Figura 4.2]

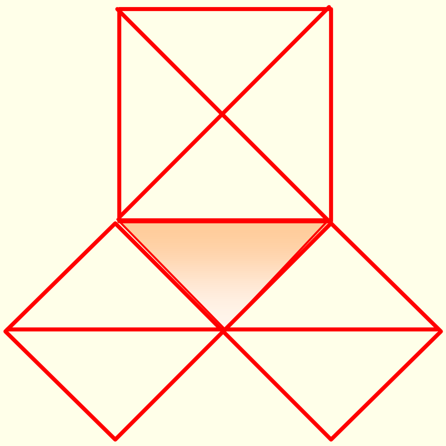


Figura 4.2

A sugestão de Cantor é análoga à dada por Hsü Ch'un-fang, que afirma que a prova mais antiga dada pelos chineses deve ter sido inspirada pelo modo de colocar tijolos quadrados sobre o solo, como mostra o diagrama da Figura 4.3.

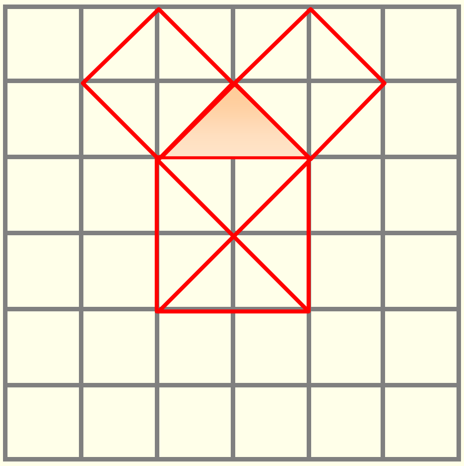


Figura 4.3

---

[45] Tian-Se, A. p. 257

A demonstração do Teorema de Pitágoras no caso especial de um triângulo retângulo isósceles segue das duas figuras.

Exemplos como este da história da matemática chinesa podem ajudar a percepção da importância das intuições geométricas e da evidência sensorial proveniente das figuras geométricas como instrumentos importantes no processo de ensino-aprendizagem da geometria, resgatando o valor instrumental que as figuras possuem no processo demonstrativo. Um valor, segundo Visokolski[46], significativo devido à intervenção apenas das propriedades que são necessárias na demonstração. Tudo o que se resgata do caso particular é um pequeno conjunto de propriedades absolutamente indispensáveis para serem utilizadas na demonstração.

O *Chou Pei Suan Ching* traz um diagrama com o qual é possível demonstrar o Teorema de Pitágoras [Figura 4.4]. Segundo Martzloff[47] "Esta é uma das mais antigas figuras chinesas que chegou até nossa época e é, sem dúvida, a mais famosa".

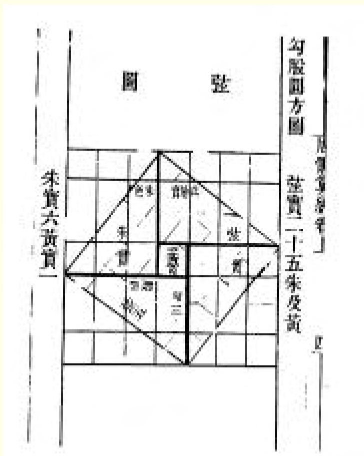


Figura 4.4.

Embora a demonstração seja feita apenas no caso do triângulo (3 , 4, 5) a idéia da demonstração é geral, como veremos a seguir[48].

Para achar a hipotenusa [*hisien*], Chao Chün-ch'ing usa o diagrama da figura 4.4 e afirma:

Multiplique o Gou [lado menor] e o Gu [lado maior] por seus próprios valores e some. Extraia a raiz quadrada do resultado obtido: dá o hsien.

Mais adiante, ele fornece a seguinte explicação: o produto do *gou* (**a**) pelo *gu* (**b**) é a área do retângulo de lados **a** e **b** que é duas vezes a área do triângulo retângulo (liláz). Portanto,

---

[46] Visokolskis, S. p. 152
[47] Martzloff, J-C p.298
[48] Swetz, F. p. 13; van der Waerden, p. 41

somando à área dos quatro triângulos retângulos a do quadrado pequeno no centro (marrom), obtém-se a área do quadrado sobre a diagonal [Figura 4.5].

Isto é,

$$c^2 = 4\frac{ab}{2} + (b-a)^2 = 2ab + (b^2 - 2ab + a^2) = a^2 + b^2$$

e o Teorema de Pitágoras fica demonstrado.

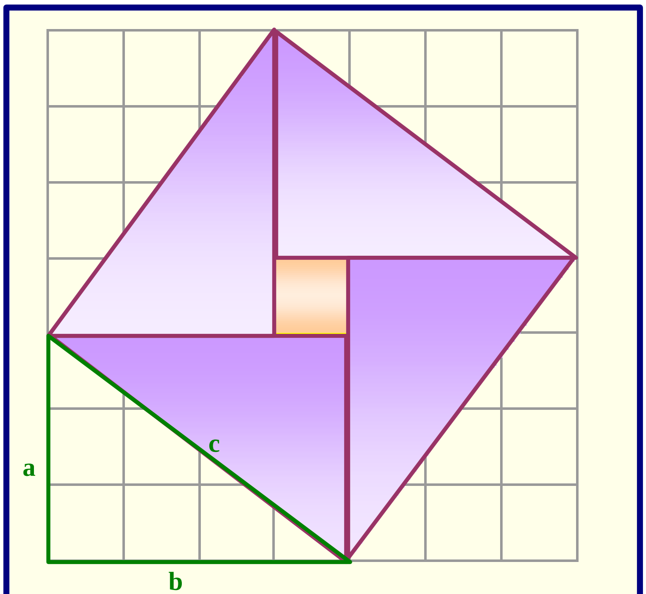


Figura 4.5

Segundo van der Waerden[49], o autor da demonstração conhecia a identidade

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Por outro lado, se

- *arrumamos os 4 triângulos conforme a figura 4.6;*

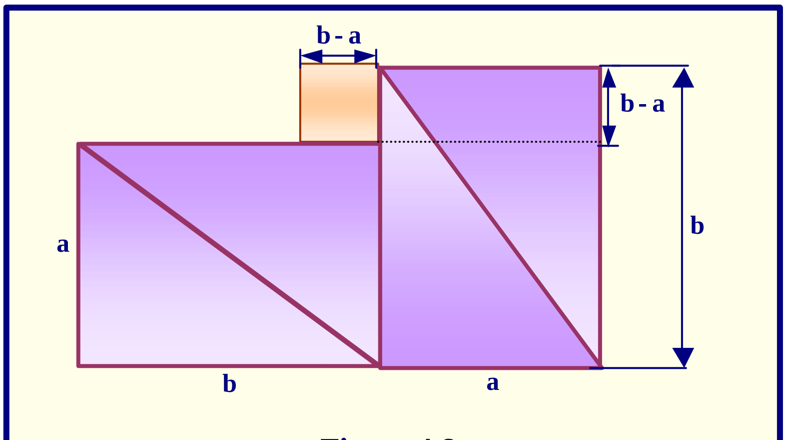


Figura 4.6

[49] van der Waerden, B. L. p. 41

- *cortamos ao longo da linha pontilhada e re-arrumamos as peças conforme a figura 4.6 temos que quatro triângulos lilazes e o quadrado marrom podem ser recortados e re-arrumados de modo a formarem um quadrado de lado **a** e outro de lado **b.** Portanto,*

$$c^2 = a^2 + b^2$$

pode ter sido encontrada sem que o autor conhecesse a identidade

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

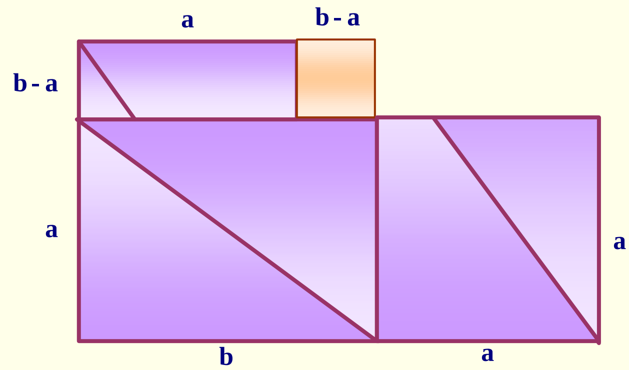


Figura 4.7

É interessante notar que uma prova semelhante do Teorema foi dada muito tempo depois na Índia por Báskara II (1150 d.C.).

Em um curso de formação de professores, a demonstração do Teorema de Pitágoras utilizando o diagrama encontrado no Chou Pi Suan Ching poderia ser iniciada apresentando aos alunos a tradução de Needham, encontrada no trabalho de van der Waerden[50] , para a demonstração dada no Chou Pi Suan Ching:

Corte um retângulo [diagonalmente] e faça a largura 3 e o comprimento 4. A diagonal entre as [duas] extremidades será 5. Agora, após desenhar um quadrado sobre esta diagonal, circunscreva a ele meios retângulos como aquele que foi deixado, formando uma placa [quadrada]. Então, os quatro meio-retângulos externos de largura 3, comprimento 4 e diagonal 5 juntos formam dois retângulos [de área 24]; então, quando é subtraído da placa quadrada de área 49 o resto tem área 25.

No comentário do capítulo IX do Jiuzhang Suanshu , Liu Hui também apresenta uma demonstração do Teorema de Pitágoras. O diagrama original de Liu Hui está perdido desde o

---

[50] van der Waerden, p. 42

século XIII, mas a reconstrução [Figura 4.8] feita pelo matemático Gu Guanguang ajuda a entender como a demonstração foi feita[51].

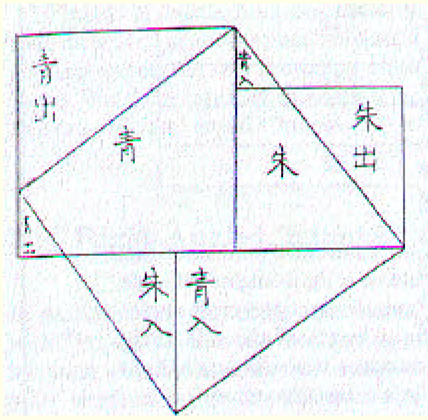


Figura 4.8

Observe que a figura [reproduzida no diagrama da figura 4.9] mostra que os três quadrados da figura 4.8 têm lados iguais aos lados **a**, **b** e **c** do triângulo retângulo [verde].

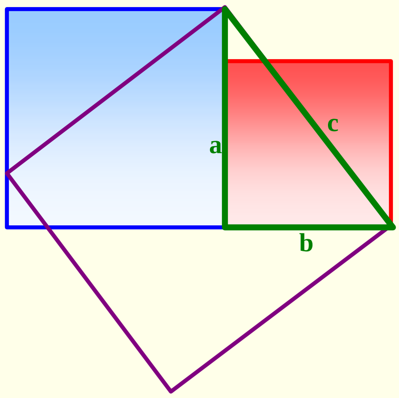


Figura 4.9

O quadrado de lado **a** é chamado na figura chinesa de azul e o de lado **b** de vermelho porque a eles correspondem peças desta cor.

Na construção inicial, o quadrado sobre a hipotenusa já está parcialmente coberto por parte dos quadrados azul e vermelho.

---

[51] Horng, W. S. p. 260

Para provar que os dois quadrados [azul e vermelho] cobrem completa e exatamente o quadrado sobre a hipotenusa, é suficiente mover as partes que estão fora deste quadrado para dentro dele conforme figura 4.10.

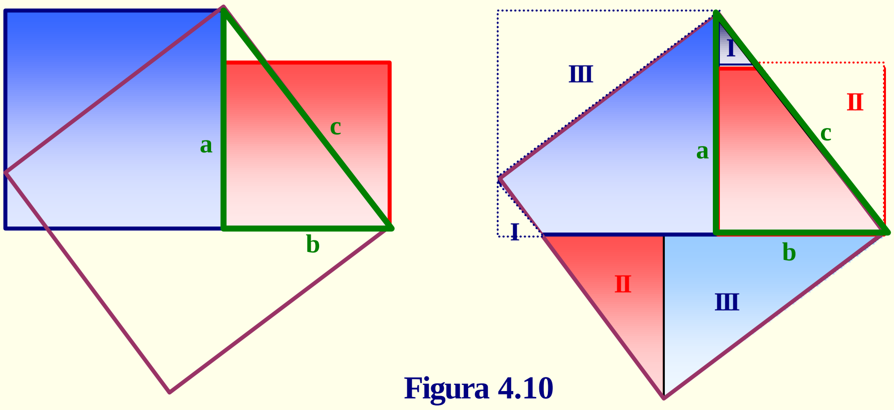


Figura 4.10

Isto prova que

$$c^2 = a^2 + b^2$$

É possível provar, usando propriedades de paralelismo e de congruência de triângulos, que as figuras removidas se encaixam completamente nos locais indicados. É importante, em um curso de formação de professores levantar esta questão e discuti-la a partir do conhecimento que os alunos têm da geometria euclidiana .

Conhecer os diversos tipos de investigação distintos do modelo demonstrativo-dedutivo grego utilizados por matemáticos para resolverem os problemas com os quais tenham se confrontado, traz a discussão sobre a importância de uma atitude mais aberta com relação à multiplicidade de formas de pensamento e de maneiras distintas de explicar a veracidade de certas afirmações, abertura essa que, traduzida para o contexto da sala de aula, seria altamente benéfica ao desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos desses futuros professores de matemática em formação.

7.5. Na antiga civilização egípcia

Vários estudiosos afirmam que não existe evidência de que os egípcios estivessem familiarizados sequer com os casos especiais do Teorema de Pitágoras. Por outro lado,

- Segundo Tian-Se[52], na explicação do método egípcio empregado na composição de seus templos, Morris Cantor observa que eles estavam familiarizados com a razão 3:4:5 dos triângulos retângulos por volta de 2000 a.C. Porém, esta visão não é

[52] Tian-Se, A. p. 254

apoiada por Heath[53], porque ele não acha nenhuma evidência na matemática egípcia para sustentar tal teoria.

- Van der Waerden[54] sugere que os egípcios talvez tivessem algum conhecimento de ternas pitagóricas e sua justificativa[55] para levantar esta hipótese baseia-se no primeiro problema encontrado no papiro Berlin 6619:

Um quadrado e um segundo quadrado, cujo lado é a metade e um quarto daquele do primeiro, têm juntos área 100. Mostre como calcular isto.

Se denotarmos os lados desconhecidos do primeiro e segundo quadrados por **x** e **y** respectivamente temos:

$$\begin{cases} y = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)x = \frac{3}{4}x \\ x^2 + y^2 = 100 = 10^2 \end{cases}$$

A solução do problema contém o seguinte procedimento escrito na linguagem atual:

- Tomar a raiz quadrada do número dado 100. Resultado: 10;
- Obter terna pitagórica (8, 6, 10).

Observe que esta terna pode ser obtida multiplicando os elementos da terna pitagórica (3, 4, 5) por 2.

Gerdes[56] tem certeza de que os egípcios antigos conheciam as chamadas ternas pitagóricas. Uma das evidências apresentadas por ele é o problema encontrado no papiro Berlin 6619. Além disso, Gerdes levanta a seguinte questão:

> Existirão outras fontes de informação diferentes de textos escritos que podem atestar que o Teorema de Pitágoras era conhecido no antigo Egito, ou até sugerir em que contexto podia ter sido descoberto?

Para responder a esta questão ele analisa os padrões de espirais que são encontrados na cultura egípcia.

Segundo Gerdes, a espiral constitui um dos elementos mais importantes na decoração egípcia. Desde a 5a. Dinastia (2498 – 2345 a.C.) ela aparece como ornamento isolado em superfícies pequenas, como por exemplo escaravelhos57 [Figura 5.1]

---

[53] Heath. p.
[54] van der Waerden, B. L. p. 16
[55] Gerdes, P. p. 6
[56] Gerdes, P. p. 6

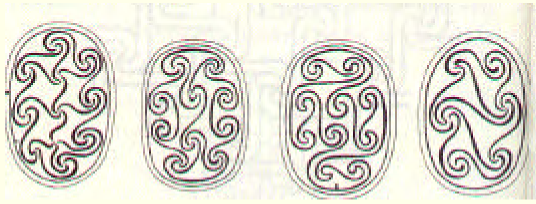


Figura 5.1.

Segundo Gerdes[58] os padrões mais simples de espirais mostram-nas na forma de um S ou em linhas contínuas de espirais duplas colocadas lado a lado. Muito mais complexo é o padrão quádruplo de espirais, que constitui a "verdadeira solução bi-dimensional do problema da ornamentação de superfícies" e, normalmente, rosetas ou flores de lótus eram usadas para preencher os quadrados vazios entre as espirais [Figura 5.2].

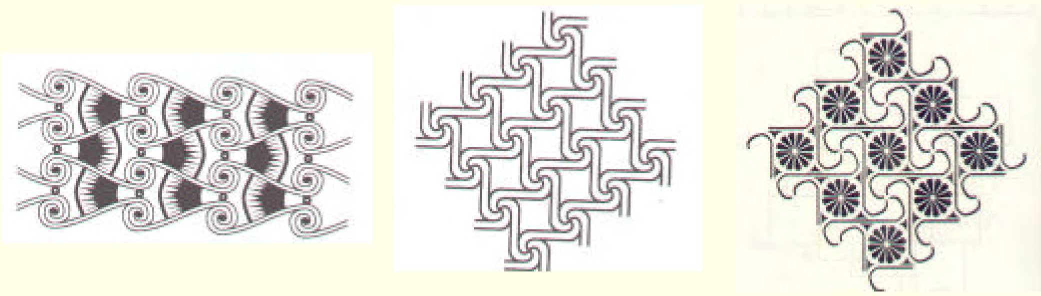


Figura 5.2

Descrevo a seguir o método sugerido por Gerdes, em seu trabalho "O Pitágoras Africano" para a construção de um padrão quádruplo de espirais que poderia ter sido utilizado pelos artesãos;

- Traçar uma grade, composta por quadrados A e B; [Figura 5.3]

---

[57] Gerdes, P. PA p. 7
[58] Gerdes, P. PA p. 8 e 9

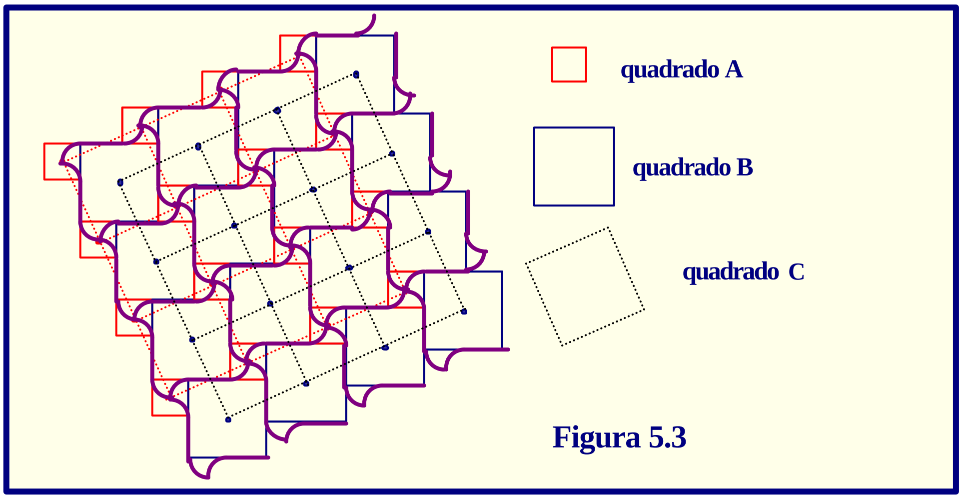


Figura 5.3

- Marcar o centro desses quadrados;
- Ou alternativamente, cobrir a grade quadrada já desenhada com quadrados do tipo **A** e **B** [Figura 5.3] Essa construção é fácil de fazer quando os comprimentos **a** e **b** dos quadrados **A’** e **B’**são múltiplos inteiros do quadrado unitário;
- Os centros dos quadrados A geram uma rede de novos quadrados;
- Seja **c** o lado desse novo quadrado C;
- Do mesmo modo, os centros dos quadrados B’ geram também uma rede de quadrados novos, congruentes com C;
- Que relação existe entre as áreas dos quadrados A, B e C?

Considere a figura 5.4 que foi extraída da figura 5.3:

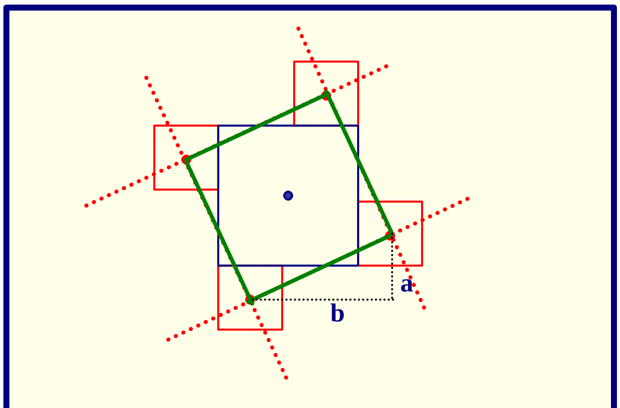


Figura 5.4.

Observe que a área do quadrado C [verde] pode ser calculada como a soma das seguintes áreas:

- Parte do quadrado azul [B] que é interior a C;
- Partes dos quatro quadrados vermelhos [A] também interiores a C que possuem a mesma área.

De fato, as retas perpendiculares que passam pelos centros dos quadrados vermelhos dividem, cada um desses quadrados, em 4 regiões de mesma área. Como os 4 quadrados vermelhos são iguais, todas as partes, independente de a que quadrado pertencem, têm a mesma área.

- Quatro triângulos congruentes, exteriores aos quadrados A e B, mas congruentes aos quatro triângulos formados pelas partes do quadrado B externas a C.

Assim,

$$\text{Área de C} = 4\frac{1}{4}\ (\text{área de A}) + \text{Área de B} = \text{Área de A} + \text{Área de B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

que é o Teorema de Pitágoras.

A translação do quadrado C para a posição ilustrada na figura 5.6 mostra que este quadrado é igual ao quadrado construído sobre a diagonal de um triângulo retângulo de lados **a** e **b**. Isto demonstra o Teorema de Pitágoras.

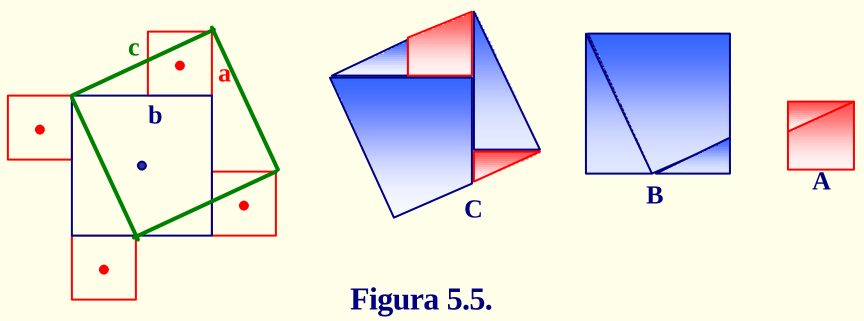


Figura 5.5.

A Figura 5.5 também sugere um outro modo de demonstrar o Teorema de Pitágoras:

A área do quadrado C [verde] é igual à soma das áreas das seguintes figuras:

- Partes dos quadrados A e B são interiores ao quadrado C;
- As partes interiores dos quadrados A e B que são exteriores a C – dois triângulos que compõem o quadrado B e um triângulo que compõe o quadrado A – são congruentes aos dois triângulos internos e aos três triângulos internos a C.

Logo,

Área do quadrado C = área do quadrado A + área do quadrado B.

Ou seja,

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Baseando-se no fato de que, durante um período de mais de mil anos, artesãos egípcios construíram quadrados, cujas áreas são iguais à soma das áreas de dois quadrados dados, Gerdes sugere que, durante esse longo, período, pelo menos alguns artesãos ou observadores do seu trabalho perceberam que

área do quadrado A + área do quadrado B = área do quadrado C.

Por esta razão, embora ainda não tenham sido encontradas fontes escritas que o demonstrem, é provável que o Teorema de Pitágoras fosse conhecido no Antigo Egito.

Além disso, Gerdes sugere que, a partir do fato de que o padrão quádruplo de espirais também pode ser construído sobre uma grade formada por paralelogramos, os artesãos egípcios sabiam – pelo menos implicitamente – como construir um paralelogramo igual em área a dois paralelogramos semelhantes ao primeiro e podiam ter conjecturado a extensão do Teorema de Pitágoras para paralelogramos [Figura 5.6] A partir desta extensão, é possível chegar a generalização dada por Pappus, de Alexandria (Egito c. 300 d.C.).

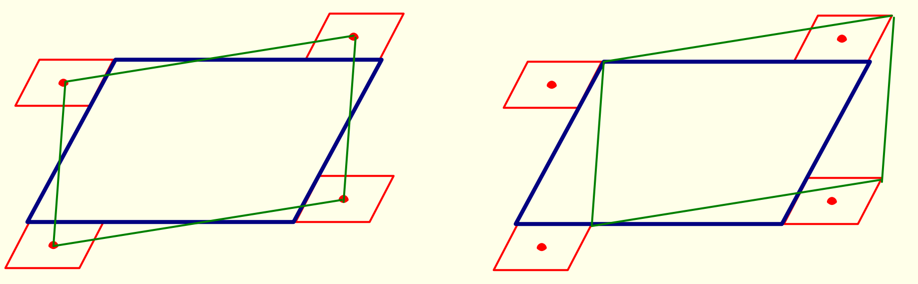


Figura 5.6.

Assim, podemos concluir que a grade subjacente ao padrão quádruplo de espirais egípcio composto pelos quadrados A e B pode servir de ponto de partida para a descoberta e demonstração do Teorema de Pitágoras e do Teorema de Pappus.

A análise de Gerdes de que é possível chegar, na cultura egípcia, a descoberta do Teorema de Pitágoras através de padrões quádruplos de simetria, leva-o a considerar o uso de padrões dest etipo entre outros povos africanos como um material rico para o estudo do Teorema de Pitágoras.

Vimos no capítulo anterior a presença de simetrias rotacionais de 90^o e, portanto, de padrões quádruplos de simetrias na arte indígena. Desta forma, considero que a identificação de padrões quádruplos de simetrias que possam ser utilizados no estudo do Teorema de Pitágoras a partir dos desenhos e pinturas dos indígenas brasileiros, em um curso de formação de professores, enriqueceria o estudo deste Teorema, o estudo das simetrias e propiciaria o desenvolvimento de atitudes favoráveis a uma maior integração dos diversos povos que fazem parte de nossa nação.

7.6. Índice de Figuras

7.7. Bibliografia

AMMA, S. T. A. **Geometry in Ancient and Medieval India** 1a. ed. Índia: Motilal Banarsidass, 1979. 280 p.

BUNT, L. N. H.; JONES, P. S.; BEDIENT, J. D. **The Historical Roots of Elementary Mathematics** 1a. Dover ed. New York: Dover Publications Inc., 1988. 299 p.

FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. The Role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics: Discussion Document for an ICMI Study. 1997-2000 **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 34, p. 255-259, 1997.

FRIBERG, J. Methods and Traditions of Babylonian Mathematics. **Historia Mathematica**, v. 8, p. 277-318, 1981.

GERDES, P. **Pitágoras Africano: um estudo em cultura e educação matemática** 1a. ed. Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1992. 103 p.

HEATH, T. A. Pythagorean Geometry In: **A History of Greek Mathematics. v. 1.** New York: Dover Publications Inc., 1981. p. 144-305.

HORNG, W. S. The Pythagorean theorem in different cultures In: FAUVEL, J.; van MAANEN, J. **History in Mathematics Education. The ICMI Study.** 1a. ed. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. 8. p. 258-262.

JONES, C. V. Finding Order in History Learning: Definig The History and Pedagogy of Mathematics In: MEETING OF THE INTERNATIONAL STUDY GROUP ON ELATIONS BETWEEN HISTORY AND PEDAGOGY OF MATHEMATICS, 1994, Blumenau. **Proceedings.** , 1994. p. 35-54.

JOSEPH, G. G. **The Crest of The Peacock** 2a. ed. USA: Princeton University Press, 2000. 455 p.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics. An Introduction** 2a. ed. USA: Addison-Wesley Educational Publishers Inc., 1998. 856 p.

MARTZLOFF, J. C.; **A History of Chinese Mathematics.** Tradução de S. Wilson. 1a. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1997. 484 p.

MIKAMI, Y. **The Development of Mathematics in China and Japan** 2a. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1910.

NEUGEBAUER, O. **The Exact Sciences in Antiquity** 2a. ed. New York: Dover Publications Inc., 1969. 240 p.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Pythagoras's Theorem in Babylonian Mathematics** Disponível em: <**www-history.mcs.st-and.ac.uk/~h.../HistTopics/**

Babylonian_Pythagoras.html> Acesso em: 21 abr. 2001.

SEIDENBERG, A. On the Volume of a Sphere. **Archive for History of Exact Sciences**, Berlin, v. 39, n. 2, p. 97-119, Dezembro 1988.

SEIDENBERG, A. The Ritual Origin of Geometry **Archieve for History of Exact Sciences.**, p. 488-527, 1963.

SWETZ, F. J. Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. By Waerden, B. L. Reviews. **Historia Mathematica**, v. 13, p. 83-85, 1986.

SWETZ, F. J. Problem Solving from the History of Mathematics. In: HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1996, Braga. **Proceedings. Actes. Actas.** Braga, 1996. p. 201-208.

TIAN-SE, A. Chinese Interest in right-angled triangles. **Historia Mathematica**, n. 5, p. 1978, 254-266 1978.

van DER WAERDEN, B. L. On Pre-Babylonian Mathematics II **Archive for History of Exact Sciences**, Berlin, v. 23, n. 1, p. 27-46, Novembro 1980.

VISOKOLSKIS, S. Intuiciones Geométricas y Percepción Visual em la Concepción Griega de la Matemática: Ser o No Ser In: HPM, 1994, Blumenau. **Proceedings.** Blumenau, 1994. p. 145-155.

WEIL, A. História da Matemática. Porque e Como. **Matemática Universitária**, n. 13, p. 17-30, Junho 1991.